Kaavakokoelma

Merkintä $x(t)$ viittaa jatkuva-aikaiseen signaaliin ja $x[n]$ diskreettiaikaiseen sekvenssiin. Yleisesti signaaleille ja järjestelmille y on vaste (output), h on järjestelmän impulssivaste ja x syöte (input). $\delta(t)$ ja $\delta[n]$ ovat yksikköimpulssifunktioita. $u(t)$ ja $u[n]$ ovat yksikköaskelfunktioita. $s(t)$ ja $s[n]$ ovat askelvastefunktioita. Nousuaika määritellään ajaksi, joka kuluu askelvasteen nousemisessa 10%:sta 90%:iin maksimiarvostaan.

Merkinnöissä on pientä vaihtelua. Fourier-sarjoissa ω_0 (rad), Ω_0 (rad/s) on peruskulmataajuus, f_0 (Hz) perustaajuus, T (s) ja N (1) jatkonpituuksia. Diskreetillä signaalilla on näytteenottotaajuus f_s tai f_T (Hz). Jatkuvalle $\Omega = 2\pi f$, $f = 1/T$, tai kirjoitetaan myös ω, yksikkönä joka tapauksessa rad/s. Diskreetille $(N, n, k \in \mathbb{Z})$ $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$.

Kompleksiluvut, Euler, geometrinen sarja, sinc, perusfunktiot:

$$\begin{aligned} z &= x + jy = re^{j\theta} \\ e^{j\theta} &= \cos(\theta) + j\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n &= \frac{1}{1-a}, |a| < 1 \\ \sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \frac{1-a^N}{1-a}, |a| < 1 \\ \mathcal{E}ven\{x(t)\} &= 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)] \\ \mathcal{O}dd\{x(t)\} &= 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)] \\ \mathrm{sinc}(\theta) &= \sin(\pi\theta)/(\pi\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) d\tau \\ \delta[n] &= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \\ u[n] &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \\ s(t) &= u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \\ s[n] &= u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \end{aligned}$$

Likiarvoja ja laskusääntö Dirac-deltafunktiolle:

θ	0	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\sin(\theta)$	0.000	0.3827	0.5000	0.7071	0.8660	1.0000	0.7071	0.0000
$\cos(\theta)$	1	0.9239	0.8660	0.7071	0.5000	0	-0.7071	-1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0)$$

Konvoluutio:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \\ y[n] &= x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \end{aligned}$$

FOURIER-SARJA

Jatkuva-aikaisen jaksollisen signaalin Fourier-sarja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jk\Omega_0 t} \qquad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

Jatkuva-aikaisen Fourier-sarjan ominaisuuksia:

Tässä $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jaksollisia jaksolla T, sekä a_k ja b_k vastaavat Fourier-sarjan kertoimet.

- lineaarisuus $Ax(t) + By(t) \leftrightarrow Aa_k + Bb_k$
- aikasiirto $x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\Omega_0 t_0}$
- taajuussiirto $e^{jM\Omega_0} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$
- reaalinen signaali $x(t) \leftrightarrow \begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
- reaalinen ja parillinen $x(t) \leftrightarrow a_k$ reaalinen ja parillinen; reaalinen ja pariton $x(t) \leftrightarrow a_k$ puhtaasti imaginaarinen ja pariton
- reaalinen $\mathcal{E}ven\{x(t)\} \leftrightarrow \mathcal{R}eal\{a_k\}$ ja reaalinen $\mathcal{O}dd\{x(t)\} \leftrightarrow j\,\mathcal{I}mag\{a_k\}$
- Parsevalin relaatio jaksolliselle signaalille $(1/T)\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

Diskreettiaikaisen jaksollisen sekvenssin Fourier-sarja:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k\, e^{jk\omega_0 n} \qquad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n}$$

Diskreettiaikaisen Fourier-sarjan ominaisuuksia:

Tässä $x[n]$ ja $y[n]$ ovat jaksollisia jaksolla N, sekä a_k ja b_k vastaavat Fourier-sarjan kertoimet jaksollisia jaksolla N.

- lineaarisuus $Ax[n] + By[n] \leftrightarrow Aa_k + Bb_k$
- aikasiirto $x[n - n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
- taajuussiirto $e^{jM(2\pi/N)n} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$
- reaalinen sekvenssi $x[n] \leftrightarrow \begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
- reaalinen ja parillinen $x[n] \leftrightarrow a_k$ reaalinen ja parillinen; reaalinen ja pariton $x[n] \leftrightarrow a_k$ puhtaasti imaginaarinen ja pariton
- reaalinen $\mathcal{E}ven\{x[n]\} \leftrightarrow \mathcal{R}eal\{a_k\}$ ja reaalinen $\mathcal{O}dd\{x[n]\} \leftrightarrow j\,\mathcal{I}mag\{a_k\}$
- Parsevalin relaatio jaksolliselle sekvenssille $(1/N)\sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$

JATK.AIK. FOURIER-MUUNNOS (CTFT)

Jatkuva-aikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$
$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

Jatkuva-aikaisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia:

Tässä $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ ja $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$.

- lineaarisuus $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$
- aikasiirto $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- taajuussiirto $e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$
- konvoluuto $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
- kertolasku $x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta$
- derivointi ajassa $(d/dt)\, x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$
- reaalinen signaali $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
- Parsevalin relaatio jaksottomalle signaalille $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

Jatkuva-aikaisen Fourier-muunnoksen muunnospareja:

Tässä signaali $\leftrightarrow$ F-muunnos.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad &\leftrightarrow \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - k\omega_0) \\
\cos(\omega_0 t) \quad &\leftrightarrow \quad \pi\, [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\
\sin(\omega_0 t) \quad &\leftrightarrow \quad \pi/j\, [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \\
\delta(t) \quad &\leftrightarrow \quad 1 \\
\delta(t - t_0) \quad &\leftrightarrow \quad e^{-j\omega t_0} \\
e^{-at} u(t) \quad &\leftrightarrow \quad 1/(a + j\omega) \\
x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad &\leftrightarrow \quad 2\sin(\omega T_1)/\omega \\
\frac{\sin(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}(Wt/\pi) \quad &\leftrightarrow \quad X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}
\end{aligned}$$

DISKR.AIK. FOURIER-MUUNNOS (DTFT)

Diskreettiaikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega$$
$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

Diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia:

Tässä $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ja $y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$, ja $X(e^{j\omega})$ ja $Y(e^{j\omega})$ ovat 2π-jaksollisia.

- lineaarisuus $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
- aikasiirto $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- taajuussiirto $e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
- konvoluuto $x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
- kertolasku $x[n] \cdot y[n] \leftrightarrow (1/(2\pi)) \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
- differenssi ajassa $x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$
- reaalinen sekvenssi $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- Parsevalin relaatio jaksottomalle sekvenssille $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = (1/(2\pi)) \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

Diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen muunnospareja:

Tässä signaali $\leftrightarrow$ F-muunnos.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad &\leftrightarrow \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, \delta(\omega - (2\pi/N)k) \\
\cos(\omega_0 n) \quad &\leftrightarrow \quad \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\Big) \\
\sin(\omega_0 n) \quad &\leftrightarrow \quad (\pi/j) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\Big) \\
\delta[n] \quad &\leftrightarrow \quad 1 \\
\delta[n - n_0] \quad &\leftrightarrow \quad e^{-j\omega n_0} \\
a^n u[n] \quad &\leftrightarrow \quad 1/(1 - a\, e^{-j\omega}) \\
x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad &\leftrightarrow \quad \frac{\sin(\omega(N_1 + 0.5))}{\sin(0.5\omega)} \\
\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}(Wn/\pi) \quad &\leftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| < W \\ 0, & W < |\omega| \le \pi \end{cases}
\end{aligned}$$