T-61.231 Hahmontunnistuksen perusteet

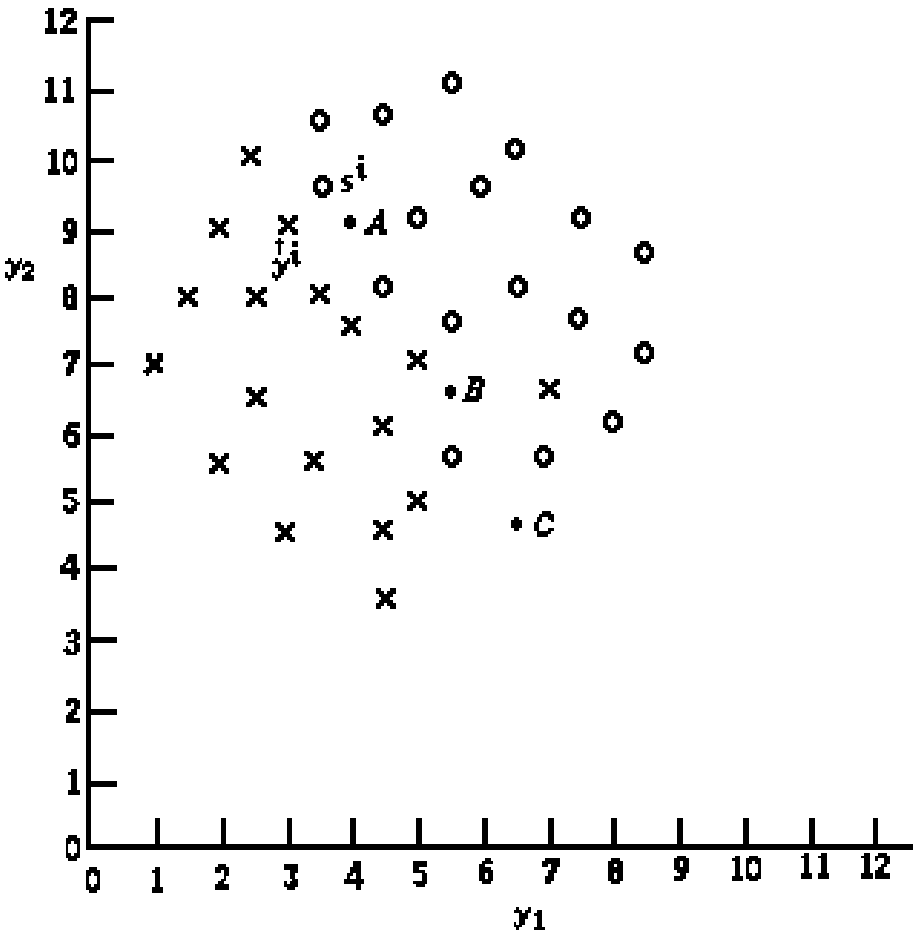
Laskuharjoitus 3: 15.10.2001

1. Muotoile yksiulotteinen Parzen-estimaatti tiheysfunktiolle p_y annetuista näytteistä

$$y^{(i)} : 2.5, 2.8, 3.4, 4.2, 4.5, 4.7, 5.2, 5.6, 7.5$$

   Käytä suorakulmaista ikkunafunktiota.

2. Luokittele pisteet A, B ja C kuvaajassa käyttäen viiden lähimmän naapurin luokittelusääntöä ja Euklidista etäisyysfunktiota.



3. Kun käytetään lähimmän napurin luokittelusääntöä kahdelle luokalle (kuvaaja), saadaan päätösalueet ja raja näille luokille. Jos $\mathbf{y}^{(i)}$ ovat näytevektoreita luokista 1 ja $\mathbf{s}^{(i)}$ näytevektoreita luokasta 2, määritelmän perusteella mikä tahansa piste $\hat{\mathbf{y}}$ rajalla toteuttaa yhtälön

$$\min_i d(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y}^{(i)}) = \min_i d(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{s}^{(i)})$$

Oletetaan etäisyysfunktion olevan Euklidinen.

a) Mikä on päätösrajan yhtälö pienessä alueessa rajan lähellä, jos vakiovektori $\mathbf{y}^{(i)}$ on lähinnä rajaa luokasta 1 ja $\mathbf{s}^{(j)}$ on vakiovektori lähinnä rajaa luokasta 2?

b) Piirrä täydellinen päätösraja luokille kuvaajassa.

c) Etsi näytevektorit, joiden poistaminen ei muuta päätösrajaa.

4. Luokittimen virhettä pyritään usein estimoimaan testijoukolla (virheprosentti lasketaan testivektoreista). Joskus testijoukko on sama kuin millä luokitin rakennettiin. Osoite, että tämä ei ole hyvä tapa erityisesti jos kyseessä on 1-NN-luokitin.

5. Oletetaan että kaksi pistejoukkoa H_1 ja H_2 R^d:ssä ovat lineaarisesti separoituvia. Tämä tarkoittaa että on olemassa vektori $\underline{\omega'} \in R^d$ ja skalaari $\omega_0 \in R^d$ siten että

$$\underline{\omega'}^T \underline{x} - \omega_0 \begin{cases} > 0 & \forall \underline{x} \in H_1 \\ < 0 & \forall \underline{x} \in H_2 \end{cases}$$

Kasvatetaan vektoreita seuraavasti:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \underline{\omega'} \\ \omega_0 \end{pmatrix}.$$

Ja vaihdetaan lopuksi merkit joukon H_2 vektoreista $\hat{\underline{x}}$.

a) Osoita että $\underline{\omega}^T \hat{\underline{x}} > 0 \quad \forall \hat{\underline{x}}$.

b) Näytä tilanne graafisesti, kun $d = 1$ ja $H_1 = \{-3, -2, -1\}, H_2 = \{5, 6, 7\}$.

6. Perceptronin oppimissäännössä päivitys $\underline{\omega}^{(n+1)} = \underline{\omega}^{(n)} + \alpha_n \hat{\underline{x}}_i$ tehdään, kun $\hat{\underline{x}}_i$ on luokiteltu väärin. Eli $e_i = \underline{\omega}^{(n)T} \hat{\underline{x}}_i < 0$. Kuinka α_n pitäisi alita jotta $\hat{\underline{x}}_i$ luokiteltaisiin varmasti oikein päivityksen jälkeen?

7. Olkoon H_1 ja H_2 lineaarisesti separoituvia ja syötteet $x_1 = -2 \in H_1$, $x_2 = -1 \in H_2$ ja $x_3 = 2 \in H_2$ opetusnäytteitä. Olkoon kysymys 6:n yhtälön painovektorin alkuarvo $\underline{w}^0 = [1, 1]^T$ ja parametri $\alpha = 0.5$. Opeta perceptroni käyttäen näitä näytteitä munneltuina tehtävän 5 mukaisesti.