T-61.231 Hahmontunnistuksen perusteet

Laskuharjoitus 2: 8.10.2000

1. Piirreavaruus olkoon 1-ulotteinen (x-akseli) ja kahden luokan tiheydet

$$p(x|\omega_1) = 0.5e^{-|x-m_1|}, p(x|\omega_2) = e^{-2|x-m_2|}$$

   a) Olkoon $m_1 = 0, m_2 = 2$ ja päätösalueet $R_1 = \{x|x \leq 1\}$ ja $R_2 = \{x|x > 1\}$. Laske virhetodennäköisyydet ϵ_1 ja ϵ_2. Piirrä kuvaaja.

   b) Miten raja R_1 ja R_2 välille tulisi asettaa, jotta $\epsilon_1 = \epsilon_2$?

2. Oletetaan nyt, että ylläolevan tehävän tiheyksille virheellisten päätösten kustannus on $(\lambda_{21} - \lambda_{22})/(\lambda_{12} - \lambda_{11}) = \frac{1}{2}$. Laske alueen R_2 rajat *a priori* todennäköisyys p:n funktioina. Etsi sellaiset p:n arvot, joille R_2 redusoituu tyhjäksi alueeksi. Oletetaan tässä, että kyseessä on Bayes-luokitin.

3. Olkoon tiheydet $p(x|\omega_1)$ ja $p(x|\omega_2)$ Gaussisia yhden muuttujan tiheyksiä ja niiden varianssit $\sigma_1^2 = 1$ ja $\sigma_2^2 = 0.5$, sekä yhteinen keskiarvo $(= 0)$. Oletetaan, että muut parametrit ovat $P(\omega_1) = 0.7$ ja $(\lambda_{21} - \lambda_{22})/(\lambda_{12} - \lambda_{11}) = 7$. Miten seuraavat syötteet luokitellaan: $\hat{x}_1 = 2.8, \hat{x}_2 = 0.2, \hat{x}_3 = 1.4, \hat{x}_4 = -0.6, \hat{x}_5 = -1.9$?

4. Otetaan kaksiluokkainen Bayesin luokitin, jossa molempien luokkien piirrevektorit ovat Gaussisesti jakautuneita seuraavilla parametreillä

   a)

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   b)

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mu_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Piirrä kuvaaja päätöspinnoista ja tiheyksien $p(\mathbf{x}|\omega_1)$ ja $p(\mathbf{x}|\omega_2)$ aproksimatiivisista muodoista molemmille tapauksille. Voimme olettaa, että $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2$ ja $\lambda_{21} - \lambda_{11} = \lambda_{12} - \lambda_{22}$.

5. Olkoon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ riippumattomia ei-negatiivisia kokonaislukuja Poisson-jakaumasta jonka odotusarvo $E[x] = \lambda$. Tämä vastaa disreettiä jakaumaa $p(x|\lambda) = \lambda^x e^{-\lambda}/x!, x \geq 0$, kun $E[x] = \mathrm{Var}[x] = \lambda$. Etsi ML-estimaatti parametrille λ. Onko se harhaton?