Tik-61.231 Hahmontunnistuksen perusteet

Laskuharjoitus 4: 16.10.2000

1. Kahden luokan keskiarvot ovat $\underline{m}_1 = (\ -2 \quad -2\ )^T$ ja $\underline{m}_2 = (\ 2 \quad 2\ )^T$. Luokan sisäiset sirontamatriisit (scatter matrices) ovat (α on parametri)

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Piirrä luokkien tiheysfunktiot olettaen lukkien olevan (approksimatiivisesti) Gaussisesti jakautuneita.

b) Laske Fisherin lineaarisen diskriminantin suunta käyttäen kaavaa

$\underline{\hat{w}} = S_W^{-1}(\underline{m_1} - \underline{m_2})$ (4-12 Schalkoff et al kirjassa).

c) Etsi Fisherin lineaarisen diskriminantin suunnat laskemalla matriisin $S_\omega^{-1} S_B$ ominaisvektorit.

d) Hahmottele Fisherin lineaarista diskriminanttia, kun $\alpha = 1, \alpha = 4, \alpha \to \infty, \alpha \to 0$. Näyttääkö tulos järkevältä?

2. Oletetaan että kaksi pistejoukkoa H_1 ja H_2 R^d:ssä ovat lineaarisesti separoituvia. Tämä tarkoittaa että on olemassa vektori $\underline{\omega'} \in R^d$ ja skalaari $\omega_0 \in R^d$ siten että

$$\underline{\omega'}^T \underline{x} - \omega_0 \begin{cases} > 0 & \forall \underline{x} \in H_1 \\ < 0 & \forall \underline{x} \in H_2 \end{cases}$$

Kasvatetaan vektoreita seuraavasti:

$$\underline{\hat{x}} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \underline{\omega'} \\ \omega_0 \end{pmatrix}.$$

Ja vaihdetaan lopuksi merkit joukon H_2 vektoreista $\underline{\hat{x}}$.

a) Osoita että $\underline{\omega}^T \underline{\hat{x}} > 0 \quad \forall \underline{\hat{x}}$.

b) Näytä tilanne graafisesti, kun $d = 1$ ja $H_1 = \{-3, -2, -1\}, H_2 = \{5, 6, 7\}$.

3. Perceptronin oppimissäännössä päivitys $\underline{\omega}^{(n+1)} = \underline{\omega}^{(n)} + \alpha_n \underline{\hat{x}}_i$ tehdään, kun $\underline{\hat{x}}_i$ on luokiteltu väärin. Eli $e_i = \underline{\omega}^{(n)T} \underline{\hat{x}}_i < 0$. Kuinka α_n pitäisi alita jotta $\underline{\hat{x}}_i$ luokiteltaisiin varmasti oikein päivityksen jälkeen?

4. Olkoon H_1 ja H_2 lineaarisesti separoituvia ja syötteet $x_1 = -2 \in H_1$, $x_2 = -1 \in H_2$ ja $x_3 = 2 \in H_2$ opetusnäytteitä. Olkoon kysymys 3:n yhtälön painovektorin alkuarvo $\underline{w}^0 = [1, 1]^T$ ja parametri $\alpha = 0.5$. Opeta perceptroni käyttäen näitä näytteitä munneltuina tehtävän 2 mukaisesti.