Simplex-algoritmi

T-61.152 Informaatiotekniikan seminaari

12.2.2008, Susanna Moisala

Sisältö

- Simplex-algoritmi
  - Lähtökohdat
  - Miten ongelmasta muodostetaan ns. Simplex-taulukko
  - Miten haetaan käypä aloitusratkaisu
  - Mitä pivotointi on ja miten se toimii
- Artificial variable eli Two-phase metodi
  - Menetelmä, jossa jo aloitusratkaisun etsimisessä käytetään Simplexiä

Simplexin lähtökohta (1/2)

- Standardimuotoinen LP:

  min $\mathbf{z=c^Tx}$, s.e. $\mathbf{Ax = b}$, $\mathbf{x \geq 0}$

  - A on m x n –kokoinen matriisi, oletus m<=n, rank(A)=m
  - Merkitään: $A = [A_B\ A_N]$, jossa
    A_B on A:n kanta, eli A:n lineaarisesti riippumattomat sarakkeet (m kpl)
    A_N on A:n muut sarakkeet

Simplexin lähtökohta (2/2)

- Kantaratkaisu (bs): $x=A_B^{-1}b$
- Käypä kantaratkaisu (bfs): $x_0=A_B^{-1}b$, $x_0 \geq 0$
- LP:tä vastaa polytooppi (käypä alue), jonka kulmapisteissä on käyvät kantaratkaisut
- Optimiratkaisu on joku käyvistä kantaratkaisuista
- Tarvitaan äärellinen määrä askelia optimiratkaisun löytämiseksi

Taulukon muodostaminen

- Min $z=c^Tx$, s.e. $Ax=b$, $x \geq 0$ ⇔ ns. Simplex-taulukko

- **Esimerkki**

  $z=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$

  $1=3x_1+2x_2+x_3$

  $3=5x_1+x_2+x_3+x_4$

  $4=2x_1+5x_2+x_3+x_5$

ratkaisu	x1	x2	x3	x4	x5
0	-1	-1	-1	-1	-1
1	3	2	1	0	0
3	5	1	1	1	0
4	2	5	1	0	1

  - Huom. Kustannusfunktio muotoon $-z=-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5$

Käypä aloitusratkaisu

- Jos alussa $Ax \leq b$, niin slack-muuttujat muodostavat käyvän aloitusratkaisun (bfs)
  - $Ax \geq b$ -> ylijäämämuuttujat
- Muuten käypä aloitusratkaisu saadaan esim. Gaussin eliminoinnin avulla
  - Kantasarakkeet muodostavat identiteettimatriisin, lisäksi kantasarakkeiden kustannusfunktion kerroin on nolla
- Gaussin eliminointi ei toimi aina, koska saatu ratkaisu ei välttämättä ole käypä, tällöin käytetään Two-phase metodia

Aloitusratkaisu slack-muuttujista

Esimerkki:

$$
\begin{aligned}
& z = 5x_1 + 4x_2 \\
& 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
& z = 5x_1 + 4x_2 \\
& 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\
& x_2 + s_3 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Kannan muodostavat s_1, s_2, s_3
- Bfs: $s_1=24$, $s_2=6$, $s_3=2$ ($x_1=0$, $x_2=0$ => $z=0$)

ratkaisu	x1	x2	s1	s2	s3
0	-5	-4	0	0	0
24	6	4	1	0	0
6	1	2	0	1	0
2	0	1	0	0	1

Aloitusratkaisu Gaussin eliminoinnilla

- Gaussin eliminointi: suoritetaan perus rivioperaatioita, kunnes kantasarakkeet muodostaa identiteettimatriisin
  - **Esimerkki:** vähennetään rivi 1 rivistä 2 ja rivistä 3 ja sitten vähennetään saadut rivit 1,2 ja 3 rivistä 0

ratkaisu	x1	x2	x3	x4	x5
0	1	1	1	1	1
1	3	2	1	0	0
3	5	1	1	1	0
4	2	5	1	0	1

ratkaisu	x1	x2	x3	x4	x5
-6	-3	-3	0	0	0
1	3	2	1	0	0
2	2	-1	0	1	0
3	-1	3	0	0	1

Pivotointi (periaate)

- Käyvästä kantaratkaisusta bfs x_0 saadaan uusi bfs x'_0 pivotoinnilla
  - Pystytään liikkumaan käyvän alueen kärkipisteistä toiseen
- Kanta siis muuttuu
  - Kantaan tulevalla muuttujalla on z-rivillä itseisarvoltaan suurin negatiivinen kerroin
  - Kannasta lähtevällä muuttujalla on pienin positiivinen ratkaisun ja tulevan muuttujan arvon suhde (ko. muuttujan rivillä)
  - Kantaan tulevan rivin ja kannasta lähtevän sarakkeen risteymässä on pivot-alkio
- Kun jokaisen muuttujan kerroin -z-rivillä on positiivinen, eli ≥0, saatu ratkaisu on optimiratkaisu

Pivotointi - Selitys kaavoilla (1/2)

- Käypä kantaratkaisu on muotoa:
  $x_0=A_B^{-1}b,\ x_0 \geq 0 \ \Rightarrow \ Sum_{i=1 \text{ to } m}(x_{i0}A_{B(i)})=b$
- Mikä tahansa kantaan kuulumaton sarake voidaan esittää kantasarakkeiden lineaarikombinaationa:
  $A_{N(k)}=Sum_{i=1 \text{ to } m}(x_{ik}A_{B(i)})$
- Kertomalla alempi yhtälö skalaarilla Q>0 ja vähentämällä se ylemmästä, saadaan:
  $Sum_{i=1 \text{ to } m}(x_{i0}-Qx_{ik})A_{B(i)}+QA_{N(k)}=b$
  $Q_0=min_{t \text{ such that } Xik>0}(x_{i0}/x_{ik})$, sillä $x_{i0}-Qx_{ik}>0$

Pivotointi - Selitys kaavoilla (2/2)

- Saatiin siis: $Q_0 = \min_{i \text{ such that } x_{ik}>0}(x_{i0}/x_{ik}) = x_{m0}/x_{ik}$
  (Q_0 on pienin positiivinen ratkaisun ja kantaan tulevan muuttujan (k) arvon suhde, m on vastaavan rivin indeksi)
- Uusi bfs: $x'_{i0} = x_{i0} - Q_0 x_{ik}$ kun i != m
  $= Q_0$ kun i = m
- Uusi kanta: $A_{B'(i)} = A_{B(i)}$ kun i != m
  $= A_{B(k)}$ kun i = m

Pivotointi (esimerkki)

- Bfs alussa : (z=6)
  x_3=1, x_4=2, x_5=3
- Kantaan tuleva: x_2
- Kannasta lähtevä: x_3
- Q_0=1/2, m=1
- Uusi pivot rivi = (nykyinen pivot rivi) / (pivot alkio)
- Uusi muu rivi = (nykyinen rivi) – (rivin pivot sarakkeen alkio)* (uusi pivot rivi)
- Uusi bfs: (z=9/2)
  x_2=1/2, x_4=5/2, x_5=3 /2

	ratkaisu	x1	x2	x3	x4	x5
-z	-6	-3	-3	0	0	0
x3	1	3	$\boxed{2}$	1	0	0
x4	2	2	-1	0	1	0
x5	3	-1	3	0	0	1

	ratkaisu	x1	x2	x3	x4	x5
-z	-9/2	3/2	0	3/2	0	0
x2	1/2	3/2	1	1/2	0	0
x4	5/2	7/2	0	1/2	1	0
x5	3/2	-11/2	0	-3/2	0	1

Two-phase metodi (periaate)

- Lineaarisen optimointitehtävän ratkaiseminen
- Tapauksiin, joissa aloitusratkaisu ei ole käypä (joku b:n arvo on negatiivinen)
- Vaiheet:
  1. Haetaan käypä aloitusratkaisu keinotekoisten muuttujien ja Simplex-algoritmin avulla
  2. Ratkaistaan alkuperäinen ongelma Simplexillä käyttäen saatua aloitusratkaisua

Two-phase metodi (1/3)

- **1. vaihe**: aloitusratkaisun bfs etsiminen
- Tarvittaessa kerrotaan alkuperäisiä yhtälöitä -1:llä, että kaikki ratkaisu-sarakkeen arvot $b_i \geq 0$
- Lisätään keinotekoiset muuttujat (artificial variables) $x^a_i \geq 0$ Simplex-taulukon vasemmalle: z-rivin arvot nollia, muut identiteettimatriisina
- Saadaan bfs: $x^a_i = b_i \geq 0$

	x^a_1 ... x^a_m	x_1 ... x_n
z	0 ... 0	
b	1 0 ... 0 1	A

Two-phase metodi (2/3)

- Minimoidaan kustannusfunktiota P= $\mathrm{Sum}_{i=1 \text{ to } m}(x^a_i)$ Simplex-algoritmilla
- Jos P:n minimoinnista seurasi:

1. Saatiin optimiratkaisu ja P>0: bfs:ää alkuperäiseen ongelmaan ei löydy => lopetetaan (jotta bfs löytyisi, täytyy min P, eli keinotekoisten muuttujien summan minimi olla nolla)
2. P meni nollaan ja yksikään x^a_i ei kuulu kantaan: ratkaisu on alkuperäisen ongelman bfs => jatketaan 2.vaiheeseen
3. P meni nollaan, mutta osa x^a_i:stä kuuluu kantaan nolla tasolla: a basic degenerate ”feasible solution"

Two-phase metodi (3/3)

- **1.vaihe**, tapaus 3 (jatkuu)
  - Ajatellaan, että saadun kannan i:s sarake on vastaavan keinotekoisen muuttujan x^a_i sarake ja x_{i0}=0
  - Ajetaan keinotekoinen muuttuja x^a_i pois kannasta ”pivotoimalla” mitä tahansa alkiota x_{ik} != 0 (koska Q_0=0, kustannus P ei muutu)
  - Toistetaan kunnes saadaan käypä kanta, jossa on alkuperäiset muuttujat => jatketaan 2.vaiheeseen
- **2. vaihe**: ratkaistaan alkuperäinen ongelma Simplex-algoritmilla, käyttäen saatua aloitusratkaisua

Yhteenveto

- Optimiratkaisua etsitään käyvän alueen kulmapisteistä, eli bfs:eistä
- Aloitusratkaisu bfs saadaan slack-muuttujista, Gaussin eliminoinnilla tai Two-phase metodilla
- Pivotoinnin avulla voidaan siirtyä yhdestä bfs:stä toiseen, kunnes optimiratkaisu löytyy

Kysymyksiä?