Lineaarisen ohjelman määritelmä

Joonas Vanninen

Sisältö

- Yleinen optimointitehtävä
- Kombinatorinen tehtävä
- Optimointiongelman tapaus
- Naapurusto
- Paikallinen ja globaali optimi
- Konveksi optimointitehtävä
- Lineaarinen tehtävä
- Yleinen muoto
- Standardimuoto

Yleinen optimointitehtävä

- Yleinen epälineaarinen optimointitehtävä:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Minimoi} && f(x) \\
&\mathit{kun} && g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& && h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \\
& && x \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Yleinen optimointitehtävä

$$\begin{array}{ll} \textit{Minimoi} & f(x) \\ \textit{kun} & g_i(x) \geq 0, \quad i=1,\ldots,m \\ & h_j(x)=0, \quad j=1,\ldots,p \end{array}$$

- Kun f konveksi, g konkaavi ja h lineaarinen ->Konveksi ohjelmointitehtävä
- Kun f, g ja h lineaarisia -> lineaarinen ohjelmointitehtävä
- Rajoitetaan x kokonaislukuihin -> kokonaislukuohjelmointitehtävä

Kombinatorinen tehtävä

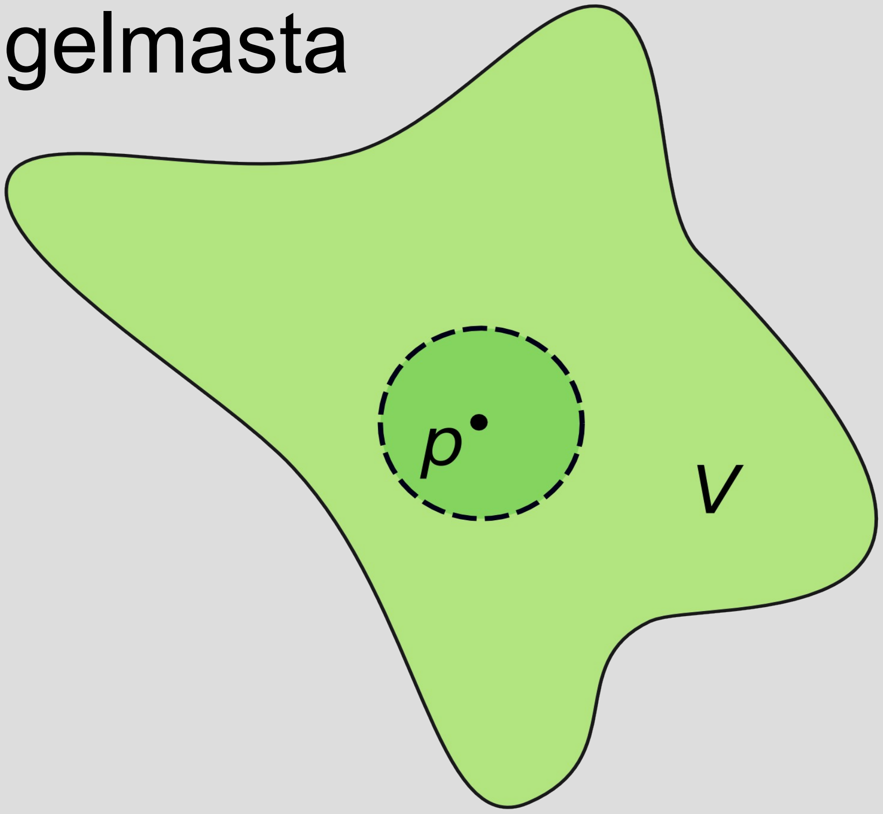
- Ongelma on luonteeltaan kombinatorinen, jos sen ratkaisu löytyy äärellisestä tai numeroituvasti äärettömästä joukosta vaihtoehtoja
- Esimerkkinä diskreetit muuttujat
- Myös lineaarinen ohjelmointitehtävä on kombinatorinen

Optimointiongelman tapaus (instance)

- Optimointiongelman tapaus on pari (F,c), missä
  - F on mahdollisten pisteiden joukko
  - C on kustannusfunktio
  - Tarkoituksena on löytää minimipiste joukosta F
- Tapausten joukkoa sanotaan ongelmaksi
  - Ongelmat muodostuvat yleensä samankaltaisista tapauksista eri lähtöarvoilla

Naapurusto

- Joukko pisteitä valitun pisteen läheisyydessä
- Naapurusto määritellään kuvauksena mahdollisista pisteistä pistejoukkoihin
- Kuvaus riippuu ongelmasta
- Esimerkki, taso:

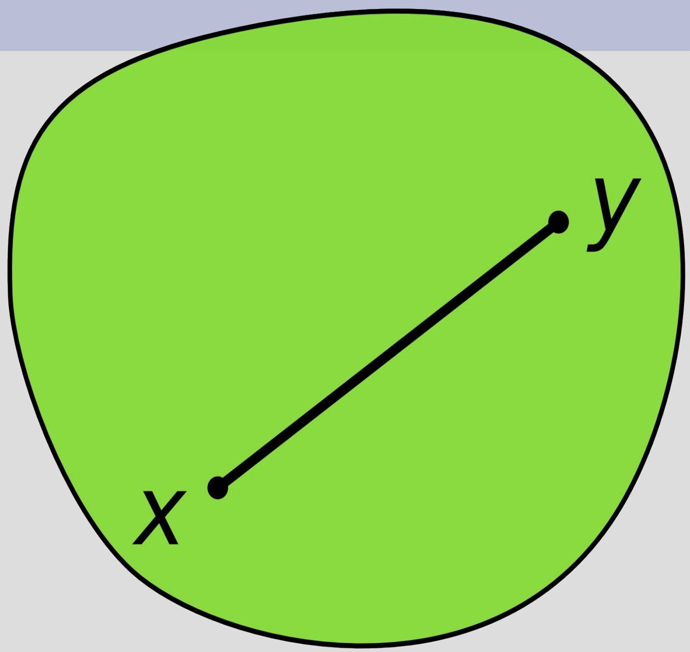


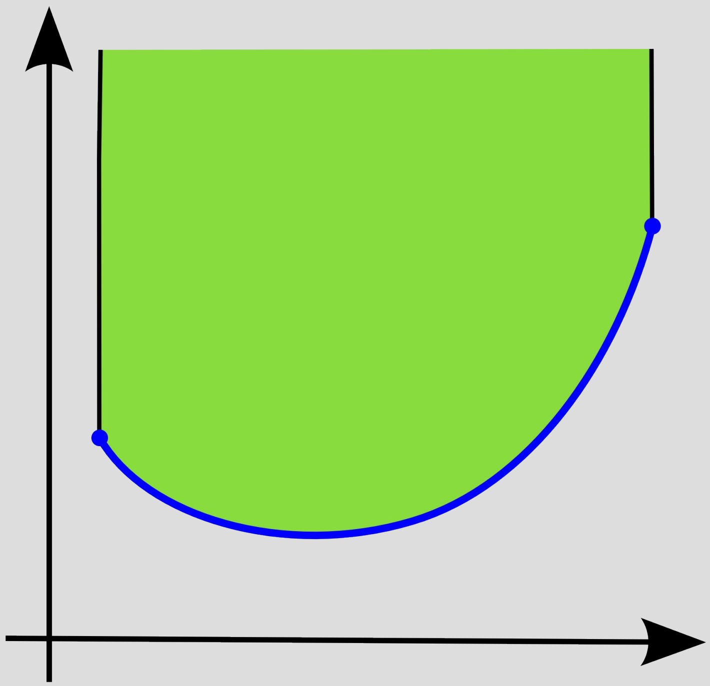
Paikallinen ja globaali optimi

- Paikallisen optimin löytäminen on yleensä helpompaa kuin globaalin
- Paikallinen optimi on piste, jonka naapurustosta ei löydy parempia pisteitä
- Mikäli paikallinen optimi on naapurustossa N aina myös globaali, sanotaan naapurustoa eksaktiksi

Konveksit joukot ja funktiot

- Konveksi joukko sisältää kaikki konveksikombi-naationsa





- Funktio on konveksi, jos sen arvojen konveksikombinaatio on suurempi kuin funktion arvo lähtöpisteiden konveksikombinaatiolla

Konveksi optimointitehtävä

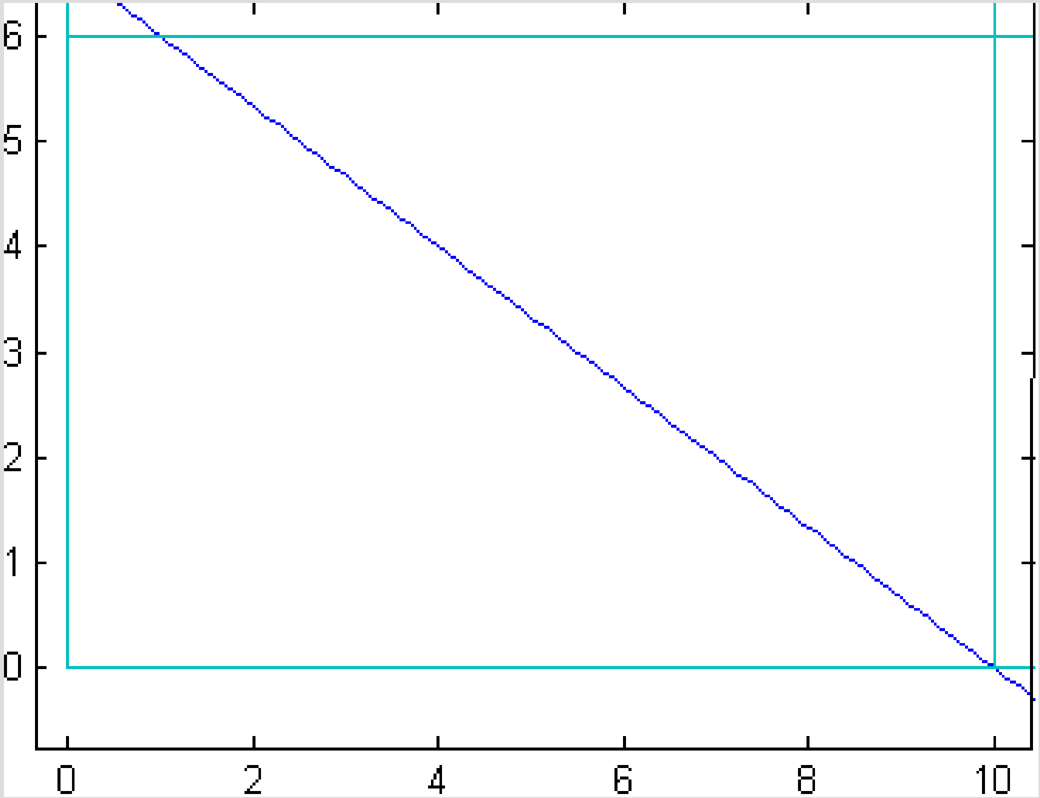
- Konveksissa optimointitehtävässä minimoidaan konveksin funktion arvoa konveksissa joukossa
  - Muodostuu konveksista arvofunktiosta ja konkaaveista rajoitusfunktioista
- Euklidinen naapurusto on eksakti
  - Paikalliset optimit ovat myös globaaleja optimeja
- Lineaarinen funktio on sekä konveksi että konkaavi
  - Lineaarinen tehtävä on konveksin tehtävän erikoistapaus

Lineaarinen tehtävä, esimerkki

- Leipomo valmistaa sämpylöitä ja patonkeja. Sämpylöiden kysyntä on 10 kappaletta päivässä ja niistä saa voittoa euron kappaleelta. Patonkia taas myydään enintään 6 kappaletta päivässä ja niistä saa voittoa 2 euroa kappaleelta. Jauhoja on käytettävissä kilo, sämpylään kuluu 100 g ja patonkiin 150g. Kuinka leipomo saa eniten voittoa?

Lineaarinen tehtävä, esimerkki

$$\begin{aligned} &Maksimoi\ f(x) = x_1 + 2x_2 \\ &kun\ x_1 \leq 10 \\ &\qquad x_2 \leq 6 \\ &\qquad 0{,}1\,x_1 + 0{,}15\,x_2 \leq 1 \\ &\qquad x_{1,}\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Lineaarinen tehtävä

- Yleisen lineaarisen tehtävän rajoitusehdot saattavat olla
  - Epäyhtälöitä
  - Yhtälöitä
- Muuttujat saattavat olla
  - Rajoitettuja
  - Rajoittamattomia
- Tehtävä voi olla
  - Maksimointitehtävä
  - Minimointitehtävä

Yleinen muoto (kanoninen)

- Kaikki lineaariset tehtävät voidaan muuttaa yleiseen muotoon

$$\begin{aligned}&\min\ c^T x\\&A x \geq r\\&x \geq 0\end{aligned}$$

- Kertomalla maksimoitava funktio -1:llä
- Kertomalla vääränsuuntaiset epäyhtälöt -1:llä
- Muuttamalla yhtälörajoite kahdeksi epäyhtälörajoitteeksi
- Korvaamalla rajoittamattomat muuttujat kahden positiivisen muuttujan erotuksella

Yleinen muoto, esimerkki

$$\begin{aligned} &Maksimoi\ f(x)=x_1+2x_2 \\ &kun\ x_1 \le 10 \\ &\quad x_2 \le 6 \\ &\quad 0{,}1x_1+0{,}15x_2 \le 1 \\ &\quad x_{1,} x_2 \ge 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &Minimoi -x_1-2x_2 \\ &kun -x_1 \ge -10 \\ &\quad -x_2 \ge -6 \\ &\quad -0{,}1x_1-0{,}15x_2 \ge -1 \\ &\quad x_{1,} x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Standardimuoto

$$\min \; c^T x$$
$$A x = r$$
$$x \geq 0$$

- Mikä hyvänsä LP-ongelma voidaan muuttaa standardimuotoon
  - Kertomalla maksimoitava funktio -1:llä
  - Korvaamalla rajoittamattomat muuttujat kahden ei-negatiivisen muuttujan erotuksella
  - Muuttamalla epäyhtälörajoitukset yhtälöiksi slack- ja surplus-muuttujien avulla
- Standardimuotoa tarvitaan esimerkiksi simplex-algoritmin käyttöön

Standardimuoto, esimerkki

$$
\begin{aligned}
&Minimoi - x_1 - 2x_2 \\
&kun - x_1 \geq -10 \\
&\quad - x_2 \geq -6 \\
&\quad -0{,}1\,x_1 - 0{,}15\,x_2 \geq -1 \\
&\quad x_{1,}\, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\longleftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&Minimoi - x_1 - 2x_2 \\
&kun - x_1 - s_1 = -10 \\
&\quad - x_2 - s_2 = -6 \\
&\quad -0{,}1\,x_1 - 0{,}15\,x_2 - s3 = -1 \\
&\quad x_{1,}\, x_{2,}\, s_{1,}\, s_{2,}\, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Kysymyksiä?