# Tik-61.246 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

Tentti/välikoe, ma 20.12.1999 klo 9-12. Salit T1 ja T2.

MERKITSE PAPERIIN, SUORITATKO 1. TAI 2. VÄLIKOKEEN VAI TENTIN Tik-61.246 (kuluneen syksyn kurssi) / Tik-61.146 (vanha kurssi)
1.välikoe: tehtävät 1, 2, 3 ja 4
2.välikoe: tehtävät 5, 6, 7 ja 8
Tentti: tehtävät 2, 4, 6, 7 ja 8

| $n$ | $\delta[n]$ | $h[n]$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 |

1. a) Olkoon annettuna järjestelmä, jota kuvaa syöte-vaste-relaatio $y[n] = x[n+1] + 2x[n] + x[n-1]$. Kyseisestä järjestelmästä on laskettu joitakin arvoja $h[n]$ syötteellä $\delta[n]$ oheiseen taulukkoon. Onko järjestelmä LTI (lineaarinen ja aika/siirtoinvariantti)? Perustele. Onko järjestelmä kausaalinen? Perustele.

   b) Olkoon erään FIR-suotimen taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} + 2e^{-j\omega} + 2e^{j\omega} - e^{j2\omega}$. Käytä hyväksesi Eulerin kaavaa $e^{j\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ ja esitä taajuusvaste sinin ja kosinin avulla sievennettynä.

(3p)

2. a) Osoita, että kahden sekvenssin konvoluution $z$-muunnos on sekvenssien $z$-muunnosten tulo eli

$$Z\{x[n] * y[n]\} = X(z)Y(z)$$

   Konvoluutio: $x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$. $z$-muunnos: $Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$.

   b) Käänteismuunna siirtofunktio $H(z) = \frac{2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$ aikatason impulssivasteeksi.

(6p)

3. Kuvassa 1 on esitetty kolmen LTI-järjestelmän napa-nollakuviot. Vastaa jokaiselle kuviolle $i, ii, iii$ allaoleviin kysymyksiin.

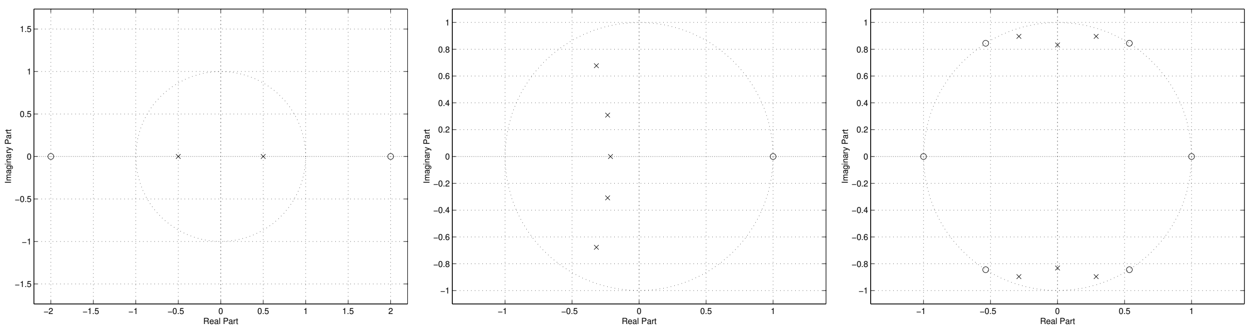
   a) Hahmottele järjestelmän amplitudivaste, jossa maksimivahvistus on 1 (0 dB) ja taajuusakseli on normalisoitu välille $0..\pi$ (puolikas yksikköympyrä).

   b) Onko suodin FIR vai IIR?

   c) Mikä on suotimen asteluku?

   d) Onko kyseessä alipäästö- (lowpass), ylipäästö- (highpass), kaistanpäästö- (bandpass), kaistanesto- (bandstop) vai kaikki taajuudet päästävä (allpass) suodin?

(6p)




*i)* *ii)* *iii)*

Kuva 1: Tehtävän 3 napa-nolla-kuviot

4. Olkoon annettuna jatkuva signaali

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 2\cos(2\pi f_2 t) + 4\cos(2\pi f_3 t) \ ,$$

missä $f_1 = 3$ kHz, $f_2 = 5$ kHz ja $f_3 = 6$ kHz.

a) Mikä on periodisen signaalin $x_1(t)$:n perusjakson pituus $T$?

b) Esitä signaalin $x_1(t)$ spektrin itseisarvo (magnitude spectrum) $|X_1(j\omega)|$ taajuusalueelta $-8 \ldots 8$ kHz.

c) Signaalia suodatetaan ennen näytteistystä analogisella, laskostumista estävällä suotimella, jonka taajuusvasteen itseisarvo on

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |f| < 4 \text{ kHz} \\ 0.1, & |f| \geq 5 \text{ kHz} \end{cases} .$$

Näytteistä suodatettu signaali $x_2(t)$ näytteenottotaajuudella $f_T = 8$ kHz ja piirrä saadun diskreetin sekvenssin $x_3[n]$ spektrin itseisarvo $|X_3(e^{j\omega})|$ välillä $-8 \ldots 8$ kHz.

(6p)

5. Ovatko seuraavat väittämät oikein vai väärin? (Oikea vastaus: +1p, väärä vastaus: −1p, ei vastausta: 0p. Tehtävän minimipistemäärä on 0p ja maksimipistemäärä 3p.)

a) Käänteisessä bilineaarimuunnoksessa $z$-tason yksikköympyrä kuvautuu yksikäsitteisesti $s$-tason taajuusakseliksi.

b) FFT-algoritmilla laskettu diskreetti Fourier-muunnos on epätarkempi kuin määritelmän mukainen Fourier-muunnos (DFT), mutta riittävän suurella $N$:n arvolla ero ei ole merkitsevä.

c) FIR-suotimen vaihevaste voi olla epälineaarinen, josta seuraa, että sen ryhmäviive $\tau(\omega) = -d\theta(\omega)/d\omega$ ei ole vakio.

d) FIR-suotimen suunnittelussa käytettävän ikkunafunktion pituus määrää aina myös suotimen pituuden.

(3p)

6. Tarkastellaan FIR-suodinta, jonka siirtofunktio on

$$H(z) = 1 + 2.5z^{-1} + z^{-2} \ .$$

a) Piirrä suotimen napa-nolla-kuvio ja hahmottele suotimen taajuusvasteen itseisarvon kuvaaja. Minkä tyyppinen suodin on kyseessä?

b) Mikä on suotimen vaihevaste? Perustele impulssivasteen avulla tai laske!

c) Korvaa suotimen kaikki viiverekisterit nelinkertaisilla viiveillä ($z^{-1} \rightarrow z^{-4}$). Piirrä nyt napa-nolla-kuvio ja hahmottele suotimen taajuusvasteen itseisarvon kuvaaja. Minkä tyyppinen suodin nyt on kyseessä?

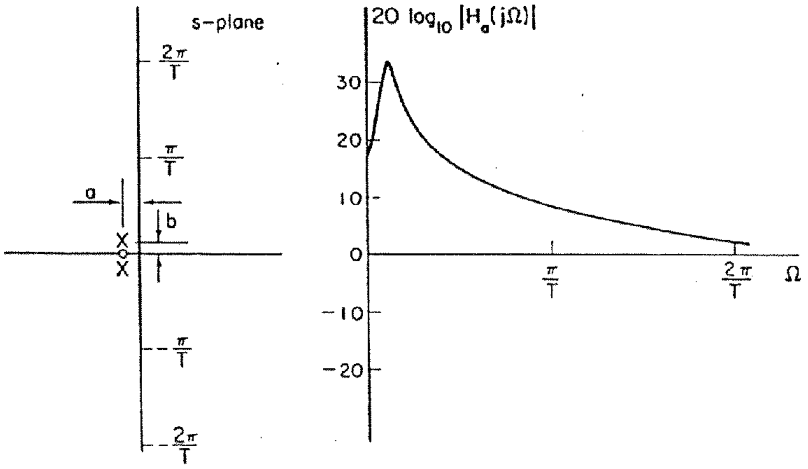
(6p)

7. Tarkastellaan analogiasiirtofunktiota $H_a(s) = (s+a)/[(s+a)^2 + b^2]$, missä vakiot $a$ ja $b$ ovat reaalisia. Suotimen napa-nolla -kuvio ($s$-tasossa) ja amplitudivaste ovat kuvan 2 mukaiset.

   Huom! Tehtävässä ei tarvitse laskea $z$-tason siirtofunktioita tms. Pyydettyjen kuvioiden hahmottelu riittää.

   a) Hahmottele impulssi-invarianttimenetelmällä kuvan suotimesta muodostetun digitaalisuotimen amplitudivaste sekä napa-nolla -kuvio.
   b) Hahmottele bilineaarimuunnoksella kuvan suotimesta muodostetun digitaalisuotimen amplitudivaste sekä napa-nolla -kuvio.
   c) Selosta lyhyesti, miten a)- ja b)-kohdan menetelmät eroavat toisistaan.

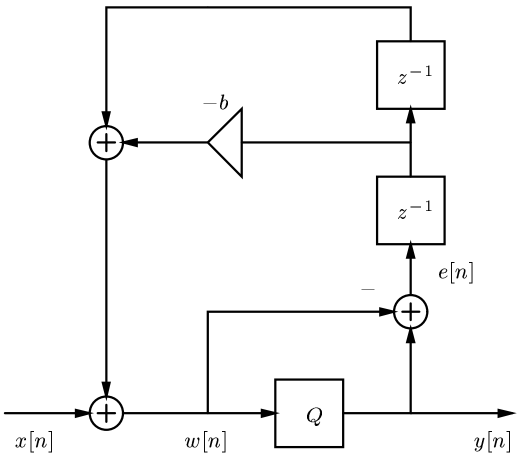
(6p)




Kuva 2: $s$-tason napa-nolla -kuvio vasemmalla ja amplitudivaste oikealla

8. Kvantisointivirhettä voidaan kompensoida ns. virheen takaisinkytkennän (error feedback) avulla. Ilman kompensointia $e[n]$ on puhdas kvantisointivirhe, toisin sanoen, $e[n] = y[n] - x[n]$. Kompensoidussa rakenteessa virhesignaali $e[n]$ on lähdön $y[n]$ ja kompensoidun tulosignaalin $w[n]$ välinen erotus, mutta kokonaisvirhe $e_{tot}$ on edelleen lähtö- ja tulosignaalin välinen erotus, $e_{tot} = y[n] - x[n]$. Kuvassa 3 on esitetty toisen asteen error feedback -rakenne. Miten kohinan spektri muuttuu parametrin $b$ funktiona, kun $b \in [-2, 2]$? Mitä tapahtuu virheen varianssille? Alkuperäisen kohinan spektri oletetaan tasajakautuneeksi (valkoista kohinaa).

(6p)




Kuva 3: Tehtävän 8 rakennekaavio.