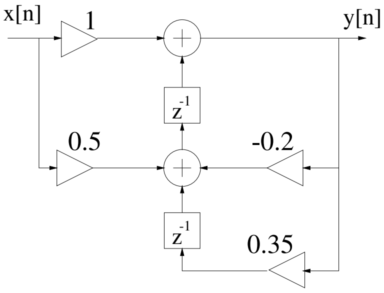
T-61.246 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

Tentti / 2. välikoe 18.12.2001 klo 16-19.
Tentissä saa olla oma taulukkokirja ja (graafinen, ohjelmoitava) laskin. Laskimen muistiin ei saa tallettaa omia muistiinpanoja.

Merkitse paperiin, suoritatko 2. välikokeen vai tentin. HUOM! Jos teit välikokeen 12.12.2001, et voi tehdä välikoetta tässä tilaisuudessa.

Tehtävät:	**2. välikoe:**	**3, 4, 5, 6 ja 7**
	tentti:	**1, 2, 5, 6 ja 7**

1. (6p, VAIN TENTTI) Tunnetaan järjestelmän $H(z)$ virtauskaavio



Kuva 1: Tehtävän 1 suotimen virtauskaavio

   a) Kirjoita differenssiyhtälö x:n ja y:n avulla.
   b) Mikä on suotimen siirtofunktio $H(z)$?
   c) Onko suodin stabiili? Perustele.
   d) Mikä on suotimen impulssivaste $h[n]$?

2. (6p, VAIN TENTTI) Tutkitaan signaalia

$$x(t) = \sum_{\langle k \rangle} A_k cos(2\pi f_k t + \theta_k)$$

   jossa $k = \{1, 2\}$ siten, että $A_1 = 2,\ f_1 = 6,\ \theta = 0$, ja $A_2 = 0.5,\ \ f_2 = 12,\ \theta = 0$.

   a) Hahmottele signaali $x(t)$ ajanvälillä $0 \ldots 0.5$ sekuntia ja sen spektri $|X(j\omega)|$ välillä $0 \ldots 20$ Hz.
   b) Mikä on $x(t)$:n jaksonpituus?
   c) Näytteistetään signaalia $x(t)$ näytteenottotaajuudella 20 Hz. Piirrä saadun diskreetin signaalin $x[n]$ spektri $|X(e^{j\omega})|$.
   d) Millä tavoin c-kohdassa tapahtunutta ilmiötä voidaan yleisesti vähentää?

3. (3p, VAIN VÄLIKOE) Ovatko seuraavat väittämät oikein vai väärin? Oikea vastaus: +0.5p, ei vastausta: 0p, väärä vastaus: -0.5p, tehtävän kokonaispistemäärä on kuitenkin 0–3p.

   a) Suoran muodon (direct form) rakenteiksi kutsutaan sellaisia toteutuksia, joissa siirtofunktioiden kertoimien arvot löytyvät suoraan (tai vastalukuina) suotimen rakennekaavioista.

b) Lineaarivaiheisessa suotimessa voidaan hyödyntää kerrointen symmetrisyyttä ja siten vähentää toteutuksen kertolaskuja.

c) Impulssi-invarianttimenetelmässä digitaalisen IIR-suotimen impulssivaste $h[n]$ saadaan analogisen suotimen siirtofunktion kertoimista $H_a(s)$.

d) Bilineaarimuunnoksessa tapahtuu taajuusakselin epälineaarinen kuvaus (taajuusvääristymä). Väite: Kun haluttu digitaalisen alipäästösuotimen rajataajuus on hyvin lähellä puolta näytteenottotaajuutta, taajuusvääristymän merkitys pienenee ja taajuuden kompensointi (prewarping) voidaan käytännössä jättää tekemättä.

e) FFT-algoritmin laskutoimitusten määrä (yleinen kompleksisuus) on $O(N\,log_2 N)$ ja DFT:ssä $O(N^2)$. Väite: Kun muunnettavan sekvenssin pituus on $N = 128 = 2^7$, niin FFT on yli 10 kertaa tehokkaampi kuin DFT yleisillä kompleksisuuksilla laskettuna.

f) Diskreetin signaalin (näytesekvenssin) katkaisulla Hann-ikkunalla $w_{Hn}[n]$ ei ole merkitystä signaalin spektriin.

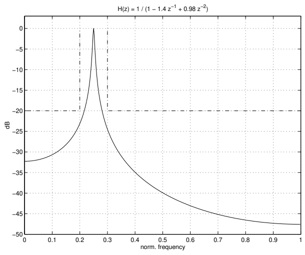
g) CD-tason 16 bitin näytetarkkuudella signaalissa on 44100 kvantisointitasoa.

h) FIR-rakenteessa signaaliarvojen kvantisointi heti kertoimien jälkeen verrattuna yhteen kvantisointiin vasta viimeisen summaimen jälkeen vähentää suotimen kokonaispyöristysvirheen varianssia.

4. (3p, VAIN VÄLIKOE) Tutkitaan toisen asteen IIR-suodinta, jonka spesifikaatiot täyttyvät siirtofunktiolla

$$H(z) = \frac{1}{1 + a\,z^{-1} + b\,z^{-2}}$$

jossa $a = -1.40$ ja $b = 0.98$. Suotimen amplitudivaste on alla olevassa kuvassa. Toteutetaan laskenta-algoritmi (suora muoto) siten, että ainoat käytössä olevat arvot kertoimille a ja b ovat $\{-\frac{7}{2}, -\frac{6}{2}, -\frac{5}{2}, \cdots, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}\}$. Pyöristä kertoimet ja kirjoita kvantisoidun suotimen siirtofunktio ja vertaa sen käyttäytymistä alkuperäiseen.



Kuva 2: Tehtävän 4 alkuperäisen suotimen spesifikaatiot ja laskettu amplitudivaste

5. (6p, VÄLIKOE, TENTTI) Tutkitaan suodinta, jonka impulssivaste on $h_0[n] = \delta[n] + 2.5\delta[n-1] + \delta[n-2]$.

a) Hahmottele suotimen $H_0(z)$ napanollakuvio. Minkä tyyppinen suodin on kyseessä?

b) Määritellään uusi suodin

$$h_1[n] = \begin{cases} h_0[n/2], & \text{kun } n \text{ parillinen} \\ 0, & \text{kun } n \text{ pariton} \end{cases}$$

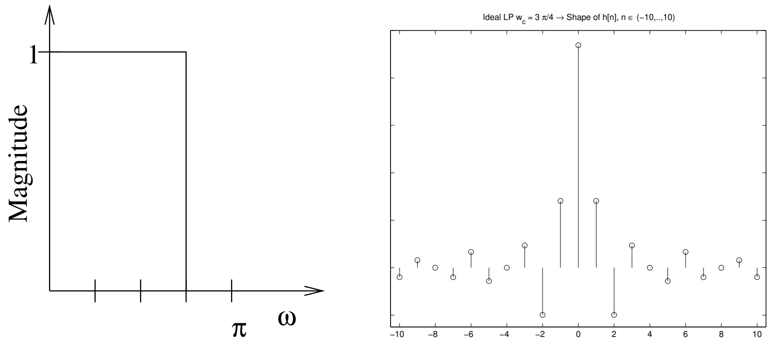
Hahmottele suotimen $H_1(z)$ napanollakuvio. Minkä tyyppinen suodin on nyt kyseessä?

c) Jatketaan kohdan b) määrittelyä vielä kerran ja määritellään suodin $h_2[n]$

$$h_2[n] = \begin{cases} h_1[n/2], \text{ kun } n \text{ parillinen} \\ 0, \text{ kun } n \text{ pariton} \end{cases}$$

Hahmottele suotimen $H_2(z)$ amplitudivaste.

6. (6p, VÄLIKOE, TENTTI)



Kuva 3: Ideaalisen alipäästösuotimen $H(e^{j\omega})$, $w_c = 3\pi/4$, amplitudivaste ja impulssivasteen $h[n]$ muoto kun $n \in (-10 \dots 10)$.

a) Suunnittele FIR-tyyppinen kausaalinen alipäästösuodin, jonka rajataajuutena on $3\pi/4$. Valitse asteluvuksi 4 ($M = 2$). Käytä katkaistuun Fourier-muunnokseen perustuvaa menetelmää (suorakaideikkuna).

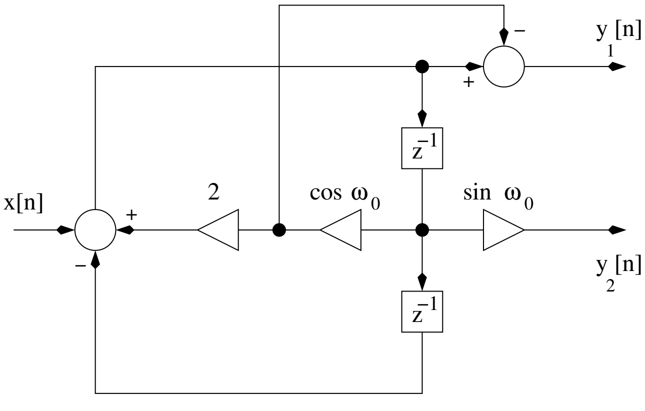
b) Tee vastaava suodin käyttäen Hann-ikkunafunktiota $w_h[n]$:

$$w_h[n] = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{2M}\right)\right], \quad -M \leq n \leq M$$

c) Selvitä sanallisesti, miten a) ja b) -kohtien suodattimien taajuusvasteet eroavat toisistaan, olettaen että ikkunan koko on riittävän suuri (esim. $M = 50$).

7. (6p, VÄLIKOE, TENTTI) Tarkastellaan alla olevan kuvan mukaista virtauskaaviota, joka generoi kaksi sekvenssiä $y_1[n]$ ja $y_2[n]$. Ratkaise nämä sekvenssit, kun $X(z) = A$.

Vinkki: vahvistukset ovat vain vakioita, jotka ovat parametrisoitu sini- ja kosinifunktioiden avulla.



Kuva 4: Tehtävän 7 virtauskaavio.

Kaavoja:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\ \sin(\theta)$$

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = h[n] \circledast x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad ,|a| < 1$$

$$\sin(x)/x \to 1,\ \text{kun } x \to 0$$

$$\sqrt[N]{c} = \sqrt[N]{re^{j\theta}} = |\sqrt[N]{r}\,|\,e^{j(\theta+2\pi k)/N}\ ,k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}, \text{ jossa } \theta(\omega) = \arg\{H(e^{j\omega})\}$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\ \omega}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi\, n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(\frac{Wn}{\pi}) \leftrightarrow \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Z-muunnos:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}\, X(z)$$

$$a\, x[n] \leftrightarrow a\, X(z)$$

$$a^n\, \mu[n] \leftrightarrow 1/(1 - a\, z^{-1})$$

$$H(z) = Y(z)/X(z)$$

$$\cos(\theta n)u[n] \leftrightarrow \frac{1-\cos(\theta)z^{-1}}{1-2\cos(\theta)z^{-1}+z^{-2}}, \qquad |z| > 1$$

$$\sin(\theta n)u[n] \leftrightarrow \frac{\sin(\theta)z^{-1}}{1-2\cos(\theta)z^{-1}+z^{-2}}, \qquad |z| > 1$$

Bilineaarimuunnos:

$$s = (2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})$$

$$\Omega_c = (2/T)\ \tan(\omega_c T/2),$$

missä Ω on jatkuvan ja ω diskreetin suotimen kulmataajuus