Tik-61.145 Signaalien digitaalisen käsittelyn perusteet

2. välikoe 5.5.1997

1. (6p) Tutkitaan 1. asteen rekursiivista suodinta, jonka tulo/lähtöriippuvuuden määrittelee differenssiyhtälö

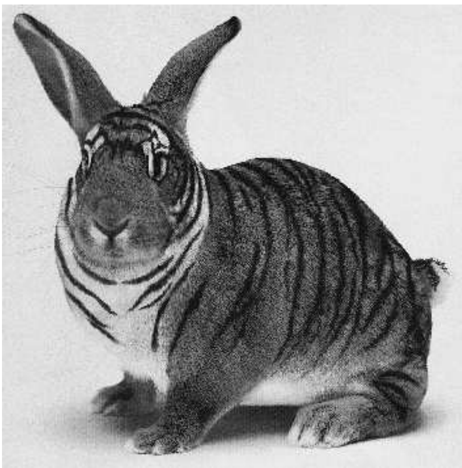
$$y(n) = x(n) + \alpha y(n-1), \quad \alpha = 0.5.$$

   (a) Laske suotimen impulssivaste. Määritä suotimen stabiilisuus *suoraan impulssivasteesta.*

   (b) Määrää suotimen siirtofunktio $H(z)$, piirrä napa-nolla -kuvio ja varjosta siihen suppenemisalue.

   (c) Tutki suodattimen impulssivastetta neljän bitin laskentatarkkuudella (merkkibitti ja 3 bittiä) pyöristävällä aritmetiikalla. Kertolaskutulokset pyöristetään siten, että kolme vähiten merkitsevää bittiä pudotetaan pois, ja ensimmäisen poisjäävän bitin ollessa 1 lisätään vähiten merkitsevään bittiin 1. Oletetaan, että luvut on skaalattu itseisarvoltaan ykköstä pienemmiksi. Esim. $\delta(0) = 1 \approx (0.111)_2 = 7/8$ (suurin positiivinen luku) ja $\alpha = 0.5 = (0.100)_2$. Miten impulssivaste käyttäytyy? Onko systeemi lineaarinen?

2. (6p) Simolan kylän jänikset alkavat olla sukupuuton partaalla kaikenlaisten niihin kohdistuneiden toimenpiteiden seurauksena (kts. kuva 1). Elikkoja oli edellisenä vuonna (1996) enää 15 ja toissavuonna (1995) 20.
Oletetaan, että vuodessa syntyy edellisen vuoden kannan verran poikasia. Puolet edellisen vuoden kannasta selviytyy seuraavalle vuodelle ja toinen puoli päätyy parempiin suihin. Lisäksi taikuri Abra Kadabra hävittää vuosittain huolimattomissa jänistaikatempuissaan pohjattomaan hattuunsa 55 % toissavuoden kannasta.



Kuva 1: Selviytyjä.

   Laadi diskreettiaikainen malli jänispopulaation kehitykselle ja piirrä siitä virtauskaavio. Mikä on jäniskanta ja onko jänisten määrä kasvamassa vai vähenemässä vuoden 2004 lopussa, kun

   (a) oletetaan, että on olemassa kokonaisjänisten joukkoa laajempi reaalijänisten joukko (vrt. kokonaisluvut ja reaaliluvut), ja kaikki reaalijänikset voivat lisääntyä.

   (b) oletetaan, että vain kokonaisjänikset säilyvät ja lisääntyvät. Mieti ensin (perustele), kumpi kvantisointitapa (kerto- / yhteenlaskun jälkeen) vastaa paremmin tehtävänannon lineaarista tilastollista mallia jäniskannan kehityksestä.

3. (6p) Kvantisointivirhettä voidaan kompensoida ns. virheen takaisinkytkennän (error feedback) avulla. Menetelmässä suodatettu virhesignaali lisätään kvantisointia (Q) edeltävään haaraan. Kuvassa 2 on esitetty sekä tavallinen kvantisointirakenne että toisen asteen error feedback -rakenne. Oletetaan, että itse kvantisoinnissa Q syntyvän virheen taajuussisällön muoto pysyy samana takaisinkytkennästä huolimatta, ts., merkitsemällä $E(z) = Y(z) - W(z)$ pätee $\left|Y'(e^{j\omega T}) - X(e^{j\omega T})\right| = \beta \left|E(e^{j\omega T})\right|$, $\beta \in R$.

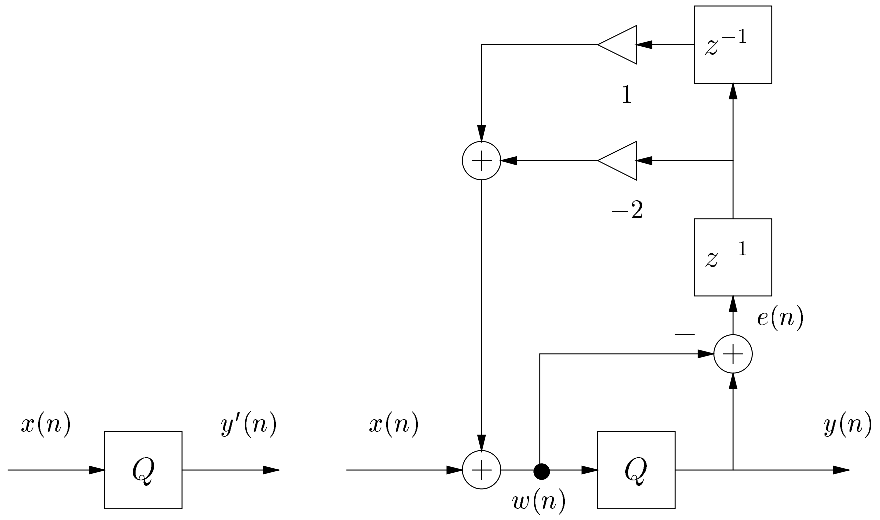
   (a) Määrää rakenteen kohinasiirtofunktio $H_e(z)$, kun

$$E_{\text{tot}}(z) = H_e(z)E(z),$$

missä $E_{\mathrm{tot}}(z)$ on kokonaisvirheen $e_{\mathrm{tot}}(n) = y(n) - x(n)$ z-muunnos.

(b) Määrää siirtofunktion $H_e(z)$ amplitudivaste. Miten kohinan spektri muuttuu virheen takaisinkytkennän ansiosta, kun oletetaan, että kohina on alunperin tasajakautunutta (valkoista kohinaa)? Mitä tapahtuu virheen varianssille?

(c) Mitä hyötyä on em. takaisinkytkennästä?



Kuva 2: Tavallinen kvantisointi ja toisen asteen error feedback -rakenne

4. (6p) Tarkastellaan analogista alipäästösuodinta, jonka s-tason siirtofunktio on

$$H_{\mathrm{LP}}(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Suotimesta saadaan ylipäästösuodin sijoituksella $H_{\mathrm{HP}}(s) = H_{\mathrm{LP}}(s^{-1})$, jolloin

$$H_{\mathrm{HP}}(s) = \frac{s}{s+1}.$$

(a) Ratkaise funktion $H_{\mathrm{HP}}(s)$ navat ja nollat ja esitä ne s-tasossa. Hahmottele suotimen amplitudivaste.

(b) Suunnittele vastaavan digitaalisen suotimen siirtofunktio $H'_{\mathrm{HP}}(z)$ impulssi-invarianssi menetelmällä eli näytteistämällä analogisen suotimen impulssivastetta. Ratkaise funktion $H'_{\mathrm{HP}}(z)$ navat ja nollat ja esitä ne z-tasossa. Hahmottele suotimen amplitudivaste ja selitä havaitsemasi ominaisuudet.

(c) Suunnittele vastaavan digitaalisen suotimen siirtofunktio $H''_{\mathrm{HP}}(z)$ käyttämällä bilineaarikuvausta. Ratkaise funktion $H''_{\mathrm{HP}}(z)$ navat ja nollat ja esitä ne z-tasossa. Hahmottele suotimen amplitudivaste.

Joitain tarpeellisia apuvälineitä:

(1) Laplace-muunnos

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

(2) Analogisen alipäästösuotimen impulssivaste

$$H_{\mathrm{LP}}(s) = \frac{1}{s+1} \quad \Leftrightarrow \quad h_{\mathrm{LP}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0. \end{cases}$$

(3) Bilineaarikuvaus analogisesta suotimesta $H(s)$ digitaaliseksi $H'(z)$

$$H'(z) = H\left(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = H\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Lisäksi oletetaan, että taajuuden esikorjaus on jo suoritettu analogisessa funktiossa. Toisin sanoen taajuusmuutosta $\omega' = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ ei tarvitse tehdä.