

## T-61.3010 Digitaalinen signaalinkäsittely ja suodatus

2. välikoe / tentti, ma 7.5.2007 klo 8-11. Salit B (A-M), M (N-Ö, non-Finnish).

Jos teet **2. välikokeen**, vastaa tehtäviin **1-2**. 2. vk on oikeus tehdä **vain kerran joko 7.5. tai 15.5.**

Jos teet **tentin**, vastaa tehtäviin **2-5**. Tentti on oikeus tehdä **vain kerran joko 7.5. tai 15.5.**

Kirjoita päällimmäisen konseptin alkuun isolla vastaatko **välikokeeseen vai tenttiin!** Rastita myös monivalintalomakkeesta oikea kohta "tentti" tai "välikoe".

Tilaisuudessa ei saa olla omaa taulukkikirjaa. Funktiolaskin / graafinen laskin muistit tyhjennettynä sallittu. Tilaisuudessa jaetaan kurssin taulukkomoniste sekä palautuslomake monivalintatehtävää (joko 1 tai 5) varten.

Kaikki konseptit palautettava, suttupaperit erikseen sekä **monivalintatehtävistä palautetaan erillinen A4-lomake**. Tehtäväpaperin ja taulukkomonisteen voi pitää.

Aloita uusi tehtävä **uudelta sivulta**. Kirjoita laskuissa käytetyt **välivaiheet mukaan**.

Muista myös **kurssipalautte**, josta saa yhden pisteen sekä välikokeeseen että tenttiin. Täytä www-lomake T-osaston palautejärjestelmässä, jonne linkki kurssin kotisivulta <http://www.cis.hut.fi/Opinnot/T-61.3010/>.

- 1) (VAIN VÄLIKOE, 14 x 1p, max 12 p) Monivalinta. Väittämissä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi**. Täytä **erillisille lomakkeelle**, johon rastita myös, teetkö välikokeen vai tentin.

Oikea valinta +1 p, väärä valinta -0.5 p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niin monene kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 12 ja minimimäärä 0.

- 1.1 Mikä suotimesta on lineaarivaiheinen?

- (A)  $H(z) = 1/[1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}]$   
 (B)  $h[n] = (0.5)^n \mu[n]$   
 (C)  $h[n] = 0.42 + 0.5 \cdot \cos(\pi n/M) + 0.08 \cdot \cos(2\pi n/M)$ , kun  $-M \leq n \leq M$ ,  $M \in \mathbb{Z}_+$ , ja  $h[n] = 0$ , kun  $n < -M$  tai  $n > M$ .  
 (D)  $h[n] = 0.6\delta[n] + 0.4\delta[n-1]$

- 1.2 Kuvan 1(a) LTI-suodin, jossa vakiot A ja B,

- (A) saadaan lineaarivaiheiseksi valitsemalla A ja B sopivasti positiivisten kokonaislukujen joukosta  
 (B) suotimen siirtofunktio on  $H(z) = 1/[1 - (A+B)z^{-1}]$   
 (C) suotimen nollat ovat kohdissa  $z_1 = -A$  ja  $z_2 = -B$   
 (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

- 1.3 Kuvan 1(b) suodin, jossa  $H_1(z) = 1 + z^{-1}$  ja  $H_2(z) = 1 - z^{-1}$ ,

- (A) on ryhmäviiveeltään  $\tau(\omega) = 1.5$ ,  $\forall \omega$   
 (B) ei ole lineaarivaiheinen  
 (C) on ristikkorakenteinen ("lattice")  
 (D) on IIR-tyyppinen

- 1.4 Tarkastellaan ensimmäisen asteen IIR-suodinta

$$H(z) = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

jossa  $-0.8 \leq \alpha \leq 0.8$ . Valitse  $\alpha$  niin, että suotimen amplitudivasteen  $|H(e^{j\omega})|$  maksimiarvo saa suurimman mahdollisimman arvon. Tämän jälkeen suodin skaalataan vakiolla K niin että skaalattun suotimen amplitudivasteen maksimiarvo on 1. Tällöin

- (A)  $K = 0.8$   
 (B)  $K = 1$   
 (C)  $K = 3$   
 (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

- 1.5 Bilineaarimuunnos:

- (A) s-tason oikea puolitaso kuvautuu yksikäymppyrän sisälle  
 (B) s-tason taajuusakseli  $j\Omega$  kuvautuu z-tason y-akseliksi  
 (C) s-tasossa oleva epästabiili suodin on myös z-tasossa epästabiili  
 (D) toteutetaan sijoituksella  $s = \frac{2}{T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ , jossa T on näytteenottoväli

- 1.6 Analogisuodin  $H(s) = \Omega/(s - \Omega)$ , jossa taajuusvääristymäkorjattu ("prewarped") rajataajuus  $\Omega = k \cdot 0.5$ , muutetaan digitaaliseksi  $H(z)$  käyttäen bilineaarimuunnosta. Digitaalinen suodin on

- (A)  $H(z) = (-1)/(1 - 2k^{-1}z^{-1})$   
 (B)  $H(z) = (1/3) \cdot (1 + z^{-1})/(1 - (1/3)z^{-1})$   
 (C)  $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - z^{-1})$   
 (D)  $H(z) = (1 + z^{-1})/(1 - 3z^{-1})$

- 1.7 Matlabissa halutaan suunnitella digitaalinen elliptinen ylipäästösuodin, jonka estokaista loppuu kohdassa 4000 Hz ja päästökaista alkaa kohdassa 5000 Hz. Näytteenottotaajuus on 20000 Hz. Kommentoita `ellipord` varten taajuudet pitää normalisoida Matlabia varten. Oikea kommento on:

- (A) `[N, Wn] = ellipord(2*5000*pi, 2*4000*pi, 1, 40, 20000);`  
 (B) `[N, Wn] = ellipord(0.2, 0.25, 1, 40, 'high');`  
 (C) `[N, Wn] = ellipord(0.5, 0.4, 1, 40);`  
 (D) `[N, Wn] = ellipord(4000, 5000, 10000, 'HP');`

- 1.8 Ideaalisen ylipäästösuotimen  $H_{HP}(z)$  rajataajuus on  $\omega_c = 3\pi/4$ . Tällöin

- (A)  $h_{HP}[0] = 0$   
 (B)  $h_{HP}[0] = 0.25$   
 (C)  $h_{HP}[0] = 0.75$   
 (D)  $h_{HP}[0] = 1$

- 1.9 Väitteen 1.8 impulssivasteesta  $h_{HP}[n]$  saadaan helposti alipäästösuodin  $h[n]$  kertomalla (moduloimalla) lukujonolla  $(-1)^n$ , eli  $h[n] = h_{HP}[n] \cdot (-1)^n$ . Mikä on suotimen  $h[n]$  rajataajuus?

- (A)  $\omega_c = \pi/4$   
 (B)  $\omega_c = \pi/2$   
 (C)  $\omega_c = 3\pi/4$   
 (D)  $\omega_c = \pi$

- 1.10 Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) voidaan laskea tehokkaasti hyödyntäen muunnosten symmetrisyysominaisuuksia. Kurssin pistelaskareissa laskettiin DFT:ä "radix-2 DIT FFT with modified butterfly computational module" -algoritmeilla, joka on yksi monista FFT-algoritmeista.

Kuvassa 3 on kyseisen algoritmin laskennan kaaviokuva, kun muunnettavan sekvenssin pituus on  $N = 128$ . Perhosyhtälöt ovat:

$$\begin{aligned}\Psi_{r+1}[\alpha] &= \Psi_r[\alpha] + W_N^r \Psi_r[\beta] \\ \Psi_{r+1}[\beta] &= \Psi_r[\alpha] - W_N^r \Psi_r[\beta]\end{aligned}$$

jossa  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ .

Kun muunnettavana sekvenssinä on  $x[n] = \{0, 1, 2, 3, \dots, 127\} = n$ , niin mitä voidaan sanoa termistä  $\Psi_3[87]$ ?

- (A)  $\Psi_3[87] = -1 - j$   
 (B)  $\Psi_3[87] = -64 + 64j$   
 (C)  $\Psi_3[87] = -64 - 64j$   
 (D)  $\Psi_3[87] = 85 - 117j$

- 1.11 Tarkastellaan samaa rakennetta ja sekvenssiä kuin väittämässä 1.10. Mitkä ensimmäisen tason arvoista  $\Psi_1[0], \dots, \Psi_1[127]$  vaikuttavat "ulostulotason" termin  $\Psi_8[87]$  arvoon?

- (A) vain  $\Psi_1[87]$   
 (B) vain  $\Psi_1[23]$  ja  $\Psi_1[87]$   
 (C) kaikki  $\Psi_1[n]$ , jossa  $n = 0, \dots, 127$   
 (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

- 1.12 Tarkastellaan samaa rakennetta ja sekvenssiä kuin väittämässä 1.10. Laskesumma  $S = \Psi_6[0] + \Psi_6[32] + \Psi_6[64] + \Psi_6[96]$ .

- (A)  $S = 6$   
 (B)  $S = 192$   
 (C)  $S = 8128$   
 (D) mikään ylläolevista ei ole oikein

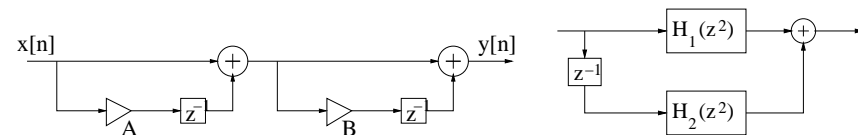
- 1.13 Tutkitaan reaalisen sekvenssin  $x[n]$  spektriä  $|X(e^{j\omega})|$  kuvassa 2(a). Sekvenssi  $x[n]$  syötetään monen näytteenottotaajuuden ("multirate") digitaalijärjestelmään  $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 4} \rightarrow y[n]$ .

Mitä voidaan sanoa ulostulon spektristä (oletus: y-akselin skaalaukset oikein)?

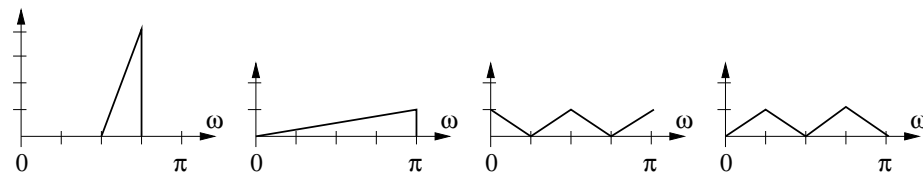
- (A) mikään allaolevista ei ole oikein  
 (B) ulostulon  $y[n]$  spektri on kuvassa 2(b)  
 (C) ulostulon  $y[n]$  spektri on kuvassa 2(c)  
 (D) ulostulon  $y[n]$  spektri on kuvassa 2(d)

- 1.14 Digitaalisen sekvenssin näytteenottotaajuutta halutaan nostaa (7/5)-osaan alkuperäisestä. Kun käytössä on sopivat "anti-alias" ja "anti-imaging" suotimet  $H_i(z)$ , niin mikä järjestely tuottaa oikean lopputuloksen?

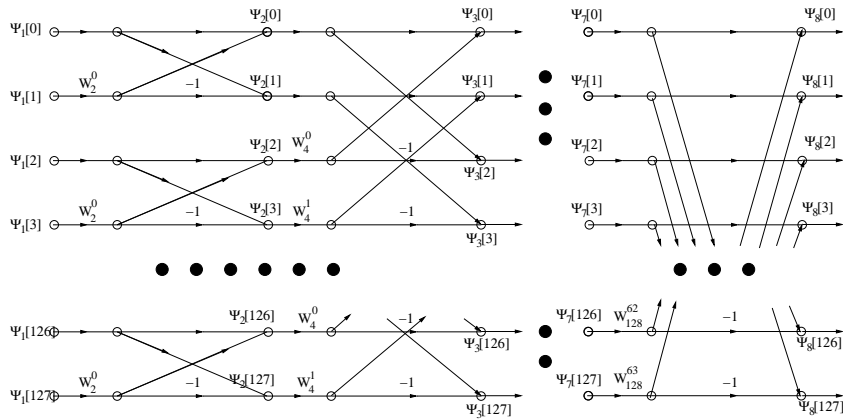
- (A)  $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow y[n]$   
 (B)  $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow y[n]$   
 (C)  $x[n] \rightarrow \boxed{H_D(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow y[n]$   
 (D)  $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 7} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H_I(z)} \rightarrow y[n]$



Kuva 1: (a) ja (b): Monivalintatehtävien 1.2 ja 1.3 kuvia.



Kuva 2: (a)  $|X(e^{j\omega})|$ , (b) (B), (c) (C) ja (d) (D): Monivalintatehtävän 1.13 kuvia.



Kuva 3: Monivalintatehtävien 1.10 – 1.12 ja 5.12 – 5.13 kuva.

2) (VÄLIKOE ja TENTTI, 6p) Essee: Äärellinen laskentatarkkuus (“finite wordlength”) ja sen vaikutukset.

Ohjeistus: Käytä selkeää ja tarpeeksi **isoa** käsialaa. Jaottele tekstisi kappaleisiin. Jos hahmottelet kuvia, muista selittää ne. Luettavaus on yksi arviointikriteeri.

3) (VAIN TENTTI, 6p) Äänisignaalia, jonka näytteenottotaajuus  $f_T = 20$  kHz, on laskettu erilaisia taaajuusesityksiä ja havaittu, että hyötysignaali on taaajuuksilla  $0 \dots 7000$  Hz ja häiriösignaali  $8000 \dots f_T/2$  Hz. Suunnitellaan FIR-tyyppinen alipäästösuodin ikkunamenetelmällä. Valitaan menetelmässä tarvittava  $-6$  dB rajataajuus, joka vastaa siis ideaalisen suotimen rajataajuutta, kohtaan  $f_c = 7500$  Hz ja siirtymäkaistan (“transition band”) leveydeksi  $\Delta f = 1000$  Hz. Käytetään ikkunointiin Blackman-ikkunaa, jonka tiedot löytyvät taulukosta 1.

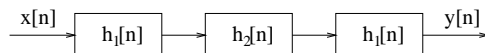
- Suotimen asteluvun kasvattaminen kaventaa siirtymäkaistan leveyttä. Arvioi sopiva asteluku  $N$  käyttäen taulukkoa 1.
- Kirjoita ideaalisen alipäästösuotimen impulssivasteen lauseke  $h_{ideal}[n]$ . Laske ja ilmoita numeerisesti kolmen merkittävän luvun tarkkuudella (esim.  $-140, 2.31, 0.00621$ ) suotimen impulssivasteen arvot  $h_{ideal}[-7]$ ,  $h_{ideal}[0]$ ,  $h_{ideal}[7]$  ja  $h_{ideal}[2007]$ .
- Käyttäen Blackman-ikkunaa toteuta FIR-suodin  $h_{FIR}[n]$  (a)-kohdan asteluvulla. Laske ja ilmoita numeerisesti kolmen merkittävän luvun tarkkuudella suotimen impulssivasteen arvot  $h_{FIR}[-7]$ ,  $h_{FIR}[0]$ ,  $h_{FIR}[7]$  ja  $h_{FIR}[2007]$ .

| Window   | $w[n], -M \leq n \leq M$  | Minimum stopband attenuation | Length of transition band $\Delta\omega$ |
|----------|---|------------------------------|--|
| Blackman | $0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{2M}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{2M})$ | 75.3 dB                      | $5.56\pi/M$                              |

Taulukko 1: Tehtävä 3: Blackman-ikkunafunktion ominaisuuksia.

4) (VAIN TENTTI, 6p) Tutkitaan kolmen LTI-järjestelmän sarjaankytkentää kuvassa 4. Tiedetään, että  $h_1[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$  ja koko kaskaadijärjestelmä  $h[n] = 2\delta[n] - 5\delta[n-1] + 5\delta[n-2] - 3\delta[n-3] + \delta[n-4]$ .

- Mikä on suotimen  $h_2[n]$  impulssivaste? Muista näyttää tarvittavat välvaiheet!
- Piirrä  $h_1[n]$ :n ja  $h_2[n]$ :n napanollakuviot sekä hahmottele niiden amplitudivasteet  $|H_i(e^{j\omega})|$ .
- Mitä voit sanoa järjestelmien  $h_1[n]$ ,  $h_2[n]$  ja  $h[n]$  stabiiliudesta ja kausaalisuudesta näiden ominaisuuksien määrittelyin perustuen? Osoita.



Kuva 4: Tehtävän 4 kaskaadikytkentä.

5) (VAIN TENTTI, 14 x 1p, max 12 p) Monivalinta. Väittämässä on 1-4 oikeaa vastausta, mutta valitse **yksi ja vain yksi**. Täytä erillisille lomakkeelle, johon rastita myös, teetkö välikokeen vai tentin.

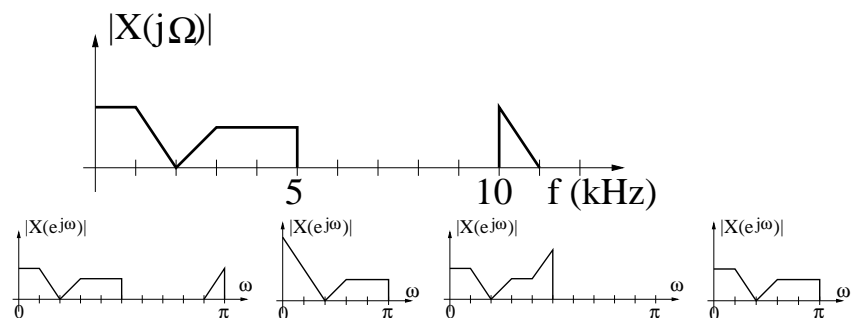
Oikea valinta +1 p, väärä valinta  $-0.5$  p, ei valintaa 0 p. Perusteluja ei tarvita. Vastaa niin monen kuin haluat. Tehtävän maksimipistemäärä on 12 ja minimimäärä 0.

- Tutkitaan diskreettiä järjestelmää  $y[n] = 4x[3n+2] + 1$ :
  - se on lineaarinen
  - se on aikainvariantti
  - se on kausaalinen
  - mikään ylläolevista ei ole oikein
- Sekvenssin  $x[n] = \cos(\pi n/3) + 2 \sin(0.25\pi n) - \sin(2\pi n/16)$  perusjako  $N_0$ :
  - $N_0 = 2$
  - $N_0 = 6$
  - $N_0 = 48$
  - $N_0 = 768$
- Sekvenssi  $x[n] = \cos(0.25\pi n^2)$ 
  - ei ole jaksollinen
  - on jaksollinen, mutta perusjakson pituus on  $\infty$
  - perusjako  $N_0 = 8$
  - mikään ylläolevista ei ole oikein
- Mikä on kausaalisen ja stabiilin siirtofunktion  $H(z) = \frac{1-z^{-2}}{1+0.5z^{-1}}$  käänteismuunnoksen  $h[n]$  arvo kohdassa  $n = 3$  kolmen merkittävän numeron tarkkuudella?
  - $h[3] = -0.952$
  - $h[3] = -0.375$
  - $h[3] = 0.375$
  - $h[3] = 0.952$
- Katso jatkuva-aikaisen reaalisin signaalin spektriä  $|X(j\Omega)|$  kuvan 5 ylärivillä. Näytteistetään taaajuudella  $f_T = 10$  kHz. Sekvenssin  $x[n]$  spektri on kuvan 5 alarivin
  - (a)
  - (b)
  - (c)
  - (d)
- Jotta signaali ei vierastu (aliasing) näytteistyksessä, näytteenottovälin  $T_s$  tulee olla
  - vähintään kymmenen kertaa niin suuri kuin signaalin korkeimman taaajuuden taaajuus
  - vähintään kaksi kertaa niin pitkä kuin signaalin korkeimman taaajuuden perusjakson  $T_0$
  - enintään puolet signaalin korkeimman taaajuuden perusjaksosta  $T_0$
  - mikään ylläolevista ei ole oikein
- LTI-suotimen  $H(z)$  napanollakuvio kuvassa 6(a) vastaa parhaiten magnitudivastetta
  - kuvassa 7(a)
  - kuvassa 7(b)
  - kuvassa 7(c)
  - kuvassa 7(d)
- LTI-suotimen  $H(z)$  magnitudivaste kuvassa 6(b) vastaa parhaiten napanollakuviota
  - kuvassa 8(a)
  - kuvassa 8(b)
  - kuvassa 8(c)
  - kuvassa 8(d)
- Suotimen taaajuusvaste on  $H(e^{j\omega}) = 1 + 0.1e^{-8j\omega}$ 
  - impulssivaste on 8 merkkiä pitkä
  - suotimen nollat ovat tasavälisesti samalla ympyrän kaarella
  - vaihevaste on lineaarinen
  - suotimen asteluku on 2
- Tutkitaan siirtofunktiota  $H(z) = 1/(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})$ . Valitsemalla suppenemisalue (ROC, “region of convergence”)
  - $|z| < 2$  saadaan stabiili suodin  $h[n]$
  - $|z| < 3$  saadaan stabiili suodin  $h[n]$
  - $|z| > 3$  saadaan stabiili suodin  $h[n]$ , joka on myös kausaalinen
  - tavalla tai toisella – suotimesta ei saada samalla kausaalista ja stabiilia
- Erään (monotonisen) ylipäästösuotimen siirtofunktio on  $H(z) = K \cdot (1 - 2z^{-1} + z^{-2})$ . Jotta suotimen maksimi on skaalattu ykköseksi, niin kerroin  $K$  pitää olla
  - $K = 0.5$
  - $K = 1$
  - $K = 2$
  - mikään ylläolevista ei ole oikein
- Diskreetti Fourier-muunnos (DFT) voidaan laskea tehokkaasti hyödyntäen muunnosten symmetrisyysominaisuuksia. Kuvassa 3 on erään FFT-algoritmin, “radix-2 DIT FFT with modified butterfly computational module” algoritmin laskennan kaaviokuva, kun muunnettavan sekvenssin pituus on  $N = 128$ . Ns. perhosytälöt ovat:
 
$$\Psi_{r+1}[\alpha] = \Psi_r[\alpha] + W_N^L \Psi_r[\beta]$$

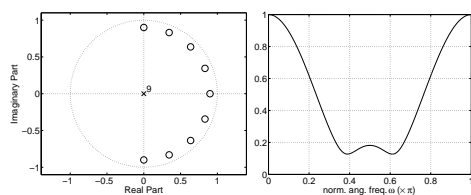
$$\Psi_{r+1}[\beta] = \Psi_r[\alpha] - W_N^L \Psi_r[\beta]$$
 jossa  $W_N = e^{-j2\pi/N}$ . Kun muunnettavana sekvenssinä on  $x[n] = \{0, 1, 2, 3, \dots, 127\} = n$ , niin mitä voidaan sanoa termistä  $\Psi_3[73]$ ?
  - $\Psi_3[73] = -1 + j$
  - $\Psi_3[73] = -64 + 64j$
  - $\Psi_3[73] = -64 - 64j$
  - $\Psi_3[73] = -73 + 105j$
- Tarkastellaan samaa rakennetta ja sekvenssiä kuin väittämässä 5.12. Laske summa  $S = \Psi_6[0] + \Psi_6[32] + \Psi_6[64] + \Psi_6[96]$ .
  - $S = 6$
  - $S = 192$
  - $S = 8128$
  - mikään ylläolevista ei ole oikein

5.14 Digitaalisen sekvenssin näytteenottotaajuutta halutaan nostaa (7/5)-osaan alkuperäisestä. Kun käytössä on sopivat "anti-alias" ja "anti-imaging" suotimet  $H_i(z)$ , niin mikä järjestely tuottaa oikean lopputuloksen?

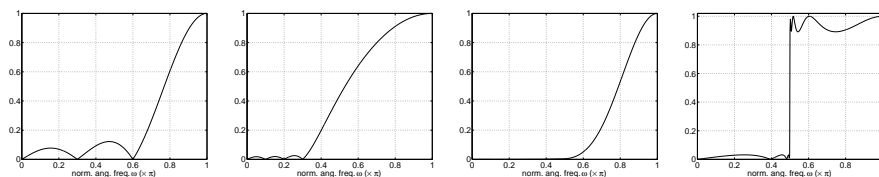
- (A)  $x[n] \rightarrow \uparrow 7 \rightarrow H(z) \rightarrow \downarrow 5 \rightarrow y[n]$   
 (B)  $x[n] \rightarrow \downarrow 5 \rightarrow H(z) \rightarrow \uparrow 7 \rightarrow y[n]$   
 (C)  $x[n] \rightarrow H_D(z) \rightarrow \downarrow 5 \rightarrow \uparrow 7 \rightarrow y[n]$   
 (D)  $x[n] \rightarrow H_I(z) \rightarrow \uparrow 7 \rightarrow \downarrow 5 \rightarrow y[n]$



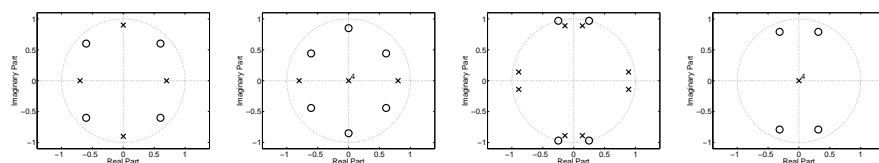
Kuva 5: Monivalintatehtävän 5.5 kuvia. Yläriivi: jatkuva  $X(j\Omega)$ , alariivi: vaihtoehdot (A) , (B) , (C) , (D)



Kuva 6: (a) ja (b): Monivalintatehtävien 5.7 ja 5.8 kuvia.



Kuva 7: (a), (b), (c) ja (d): Monivalintatehtävien 5.7 kuvia.



Kuva 8: (a), (b), (c) ja (d): Monivalintatehtävien 5.8 kuvia.