Datasta Tietoon, syksy 2011

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1 [pe 4.11.2011, ma 7.11.2011]

H1 / 1. (Konvoluutiosuodin)
Konvoluutiosuodin lasketaan kaavalla

$$g_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m s_{k-m},$$

missä f_k on (diskreetti) tulosignaali, s_k on suodinjono, ja g_k on lähtösignaali. Laske ja piirrä lähtösignaali kun
a)

$$\begin{aligned} f_0 &= 1,\ f_m = 0 \text{ muuten;} & (1) \\ s_0 &= 2,\ s_1 = 1,\ s_n = 0 \text{ muuten} & (2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_0 &= 2,\ f_1 = -1,\ f_m = 0 \text{ muuten;} & (3) \\ s_0 &= -1,\ s_1 = 2,\ s_2 = 1,\ s_n = 0 \text{ muuten.} & (4) \end{aligned}$$

H1 / 2. (Suodatus taajuusalueessa)
Taajuusalueessa Tehtävän 1 konvoluutiokaava tulee muotoon

$$G(\omega) = H(\omega)S(\omega)$$

missä funktiot ovat vastaavien diskreettisignaalien diskreettiaikaisia Fourier-muunnoksia (DTFT)

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega m}$$

a) Osoita että Tehtävän 1 b jonoille f ja s saadaan Fourier-muunnokset $F(\omega) = 2 - e^{-i\omega}$ ja $S(\omega) = -1 + 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}$. Laske näiden tulo $G(\omega) = H(\omega)S(\omega)$ ja vertaa saadun polynomin kertoimia Tehtävän 1 b lopputulokseen g.

H1 / 3. (Fourier-muunnos)
Diskreettiaikainen Fourier-muunnos (DTFT) on määritelty

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega m}$$

a) Osoita että käänteismuunnos on

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{i\omega n} d\omega$$

b) Ideaalisen alipäästösuotimen Fourier-muunnos (välillä $-\pi \le \omega \le \pi$) on

$$H(\omega) = 1 \text{ jos } |\omega| \le \omega_0,\ 0 \text{ muuten.} \quad (5)$$

Käyttäen käänteismuunnosta laske vastaava jono h_n ja piirrä se kun $\omega_0 = \pi/2$.

H1 / 4. (Alimerkkijonohistogrammit)
DNA-molekyyli voidaan kirjoittaa merkkijonona, jossa on 4 eri kirjainta A, C, G, T, esim. ...AAGTACCGTGACG-GAT ... Oletetaan että koko merkkijonon pituus on miljoona merkkiä. Haluamme muodostaa histogrammeja n:n pituisille osamerkkojonoille (jos $n = 1$, niin merkeille A, C, G, T; jos $n = 2$, niin pareille AA, AC, ... TT jne.). Kuinka suureksi voi n:n valita, jos kuhunkin histogrammin lokeroon halutaan osuvan keskimäärin vähintään 10 osamerkkijonoa?

H1 / 5. (Korkeaulotteiset avaruudet)
d-ulotteiset datavektorit ovat tasaisesti jakautuneita hyperkuutioon, jonka sivun pituus on 1. Määritellään sisäpisteiksi ne, joiden etäisyys hyperkuution pinnasta on vähintään $\epsilon > 0$. Osoita että sisäpisteiden joukon suhteellinen tilavuus menee nollaan kun $d \to \infty$, toisin sanoen hyvin suurissa dimensioissa lähes kaikki pisteet ovat hyperkuution pinnalla.

H1 / 6. (Korkeaulotteiset avaruudet)

Luennoilla mainittiin ilman todistusta että n: n pisteen keskimääräinen etäisyys d -ulotteisessa hyperkuutiossa on

$$D(d,n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{d}}$$

Tämä on likimääräinen kaava. Katsotaan erikoistapausta: n pistettä on sijoittunut n:n pienemmän samanlaisen hyperkuution keskipisteisiin, missä pienet hyperkuutiot eivät leikkaa toisiaan mutta niiden unioni on koko hyperkuutio. Osoita että pisteiden etäisyydet ovat

$$D(d,n) = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{d}},$$

kun kahden pisteen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ etäisyys määritellään siten että se on $\max_i |x_{i1} - x_{i2}|$. Kokeile tapausta $d = 2$, $n = 4$ ja totea että tulos pätee.

PISTETEHTÄVÄ P1 [DL ma 14.11.2011 klo 14.00]

Digitoidaan pieni pätkä puhesignaalia, jolle tulee seuraavat arvot:

$$f_{-2} = 0,\ f_{-1} = 0,\ f_0 = 0.1,\ f_1 = 0.8,\ f_2 = 0.5,\ f_3 = -0.2$$

Niinsanotun keskiarvoistavan alipäästösuotimen impulssivaste on seuraava:

$$s_0 = 0.2,\ s_1 = 0.6,\ s_2 = 0.2,\ s_k = 0,\ \text{muualla}$$

Laske **käsin** puhesignaalin konvoluutio suotimen impulssivasteen kanssa $g_n = \sum_k s_k f_{n-k}$. Ensimmäiset 4 nollasta poikkeavaa arvoa $g_0, \ \ldots, \ g_3$ riittävät. Voit tarkistaa tuloksen Matlabilla tai Octavella.