Datasta Tietoon, syksy 2007

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2 [pe 16.11.2007, ke 21.11.2007]

H2 / 1. (Pääkomponenttianalyysi)
On annettuna seuraava datamatriisi $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Piirrä $\mathbf{X}$:n sarakkeet (x_1, x_2) - koordinaatistoon
b) Keskiarvoista $\mathbf{X}$ vähentämällä sarakkeista niiden keskiarvovektori
c) Muodosta kovarianssimatriisi $\mathbf{C}$ ja laske sen suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori. Piirrä sen suunta kohdan a) kuvaan. Miten tuloksia voi tulkita pääkomponenttianalyysin mukaisesti?

H2 / 2. (Pääkomponenttianalyysi)
Olkoon $\mathbf{x}$ nollakeskiarvoinen satunnaisvektori josta on olemassa otos $\mathbf{x}(1), ..., \mathbf{x}(n)$. Olkoon $\mathbf{w}$ yksikkövektori (siis $\|\mathbf{w}\| = 1$) ja $y = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$. Halutaan maksimoida y:n varianssi $E\{y^2\} = E\{(\mathbf{w}^T\mathbf{x})^2\}$. Osoita että se maksimoituu, kun $\mathbf{w}$ on matriisin $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

H2 / 3. (On-line-pääkomponenttialgoritmi)
Luennolla esitettiin ns. SGA-algoritmi edellisissä tehtävissä käytetyn ominaisvektorin laskemiseksi:

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} + \gamma[y\mathbf{x} - y^2\mathbf{w}].$$

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi että vektori $\mathbf{x}$ on vakio, $y = \mathbf{w}^T\mathbf{x}$ ja oppimiskerroin γ on (pieni) vakio. Mihin vektori $\mathbf{w}$ suppenee tässä algoritmissa?

H2 / 4. (ML-estimointi)
Laske suurimman uskottavuuden estimaatti eksponentiaalijakauman

$$p(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$$

parametrille λ kun suureesta x on olemassa otos $x(1), ..., x(n)$.

H2 / 5. (Bayes-estimointi)
On annettu otos $x(1), ..., x(n)$ suureesta, jonka tiedetään olevan normaalijakautunut

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

On syytä olettaa että keskiarvo μ on lähellä nollaa. Koodataan tämä olettamus priorijakaumaan

$$p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\mu^2}.$$

Laske Bayes-MAP-estimaatti odotusarvolle μ ja tulkitse sitä kun varianssi σ^2 vaihtelee pienestä suureen.