Datasta Tietoon, syksy 2007

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1 [pe 9.11.2007, ke 14.11.2007]

H1 / 1. (Konvoluutiosuodin)
Konvoluutiosuodin lasketaan kaavalla

$$g_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m h_{k-m},$$

missä f_m on (diskreetti) tulosignaali, h_n on suodinjono, ja g_k on lähtösignaali. Laske ja piirrä lähtösignaali kun
a)

$$\begin{aligned} f_0 &= 1,\ f_m = 0 \text{ muuten;} && (1)\\ h_0 &= 2,\ h_1 = 1,\ h_n = 0 \text{ muuten} && (2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_0 &= 2,\ f_1 = -1,\ f_m = 0 \text{ muuten;} && (3)\\ h_0 &= -1,\ h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_n = 0 \text{ muuten.} && (4) \end{aligned}$$

H1 / 2. (Fourier-muunnos ja suodatus)
Taajuusalueessa Tehtävän 1 konvoluutiokaava tulee muotoon

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

missä funktiot ovat vastaavien diskreettisignaalien Fourier-muunnoksia, esim.

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega m}.$$

a) Osoita että käänteismuunnos on

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\omega)e^{i\omega n}d\omega.$$

b) Ideaalisen alipäästösuotimen Fourier-muunnos (välillä $-\pi \le \omega \le \pi$) on

$$H(\omega) = 1 \text{ jos } |\omega| \le \omega_0,\ 0 \text{ muuten.} \tag{5}$$

Käyttäen käänteismuunnosta laske vastaava jono h_n ja piirrä se kun $\omega_0 = \pi/2$.

H1 / 3. (Alimerkkijonohistogrammit)
DNA-molekyyli voidaan kirjoittaa merkkijonona, jossa on 4 eri kirjainta A, C, G, T, esim. ...AAGTACCGTGACGGAT ... Oletetaan että koko merkkijonon pituus on miljoona merkkiä. Haluamme muodostaa histogrammeja n:n pituisille osamerkkojonoille (jos $n = 1$, niin merkeille A, C, G, T; jos $n = 2$, niin pareille AA, AC, ... TT jne.). Kuinka suureksi voi n:n valita, jos kuhunkin histogrammin lokeroon halutaan osuvan keskimäärin vähintään 10 osamerkkijonoa?

H1 / 4. (Korkeaulotteiset avaruudet)
d-ulotteiset datavektorit ovat tasaisesti jakautuneita hyperkuutioon, jonka sivun pituus on 1. Määritellään sisäpisteiksi ne, joiden etäisyys hyperkuution pinnasta on vähintään $\epsilon > 0$. Osoita että sisäpisteiden joukon suhteellinen tilavuus menee nollaan kun $d \to \infty$, toisin sanoen hyvin suurissa dimensioissa lähes kaikki pisteet ovat hyperkuution pinnalla.

H1 / 5. (Korkeaulotteiset avaruudet)
Luennoilla mainittiin ilman todistusta että n: n pisteen keskimääräinen etäisyys d -ulotteisessa hyperkuutiossa on

$$D(d,n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Tämä on likimääräinen kaava. Katsotaan erikoistapausta: n pistettä on sijoittunut n:n pienemmän samanlaisen hyperkuution keskipisteisiin, missä pienet hyperkuutiot eivät leikkaa toisiaan mutta niden unioni on koko hyperkuutio. Osoita että pisteiden etäisyydet ovat

$$D(d,n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{d}},$$

kun kahden pisteen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ etäisyys määritellään siten että se on $\max_i |x_{i1} - x_{i2}|$. Kokeile tapausta $d = 2$, $n = 4$ ja totea että tulos pätee.