

T-61.152: Max-flow / min-cut -ongelmat

Aki Saarinen

4.3.2008

Sisältö

- 1 Virtausverkko ja virtaus
 - Määritelmät
 - Esimerkki
- 2 Max-flow / min-cut
 - Max-flow
 - Graafin leikkaus
 - Min-cut
 - Max-flow:n ja min-cut:n yhteys
- 3 Ford-Fulkerson-algoritmi
 - Perusajatus
 - Pseudokoodi
 - Tarkastelu
- 4 Yhteenveto

Virtausverkko

Määritellään virtausverkko (flow-network) suunnattuna graafina

Määritelmä: Virtausverkko

| | |
|-----------------------|--|
| $N = (s, t, V, E, b)$ | V , solmut |
| | E , kaaret |
| | $s \in V$, lähtösolmu |
| | $t \in V$, maalisolmu |
| | $n = V $, solmujen määrä |
| | $m = E $, kaarien määrä |
| | $b \in R^m$, kaarien painot l. kapasiteetit |

Virtaus

- Nyt voidaan kuvata virtausta tässä verkossa funktiolla f , jossa $f(u, v)$ on virtaus solmusta u solmuun v .

Määritelmä: Virtaus

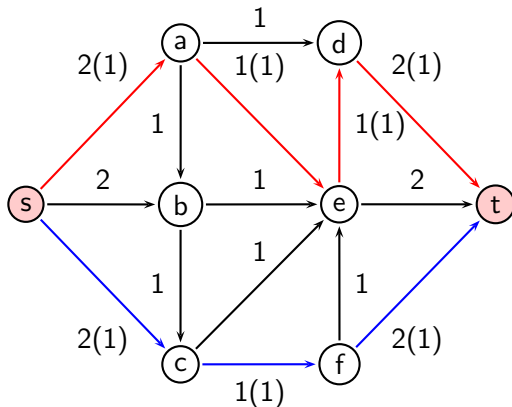
$f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, siten että:

$$0 \leq f(u, v) \leq b(u, v), \text{ kaikilla } (u, v) \in E$$

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{(v,w) \in E} f(v, w), \text{ kaikilla } v \in (V - \{s, t\})$$

- Ensimmäinen ehto: kapasiteetteja ei ylitetä
- Toinen ehto: Muissa kuin lähtö- ja maalisolmuissa lähtevä virtaus on yhtä suuri kuin saapuva virtaus

Esimerkki virtauksesta



- lähtösolmu s
- maalisolmu t
- virtaus solmujen (a, e, d) ja (c, f) kautta
- $f(u, v) = 1$ näille, 0 muutoin
- kokonaisvirtaus $s \rightarrow t$ on 2

Max-flow: duaali

Suurin mahdollinen virtaus lähtösolmusta maalisolmuun

Max-flow LP:n duaalimuodossa

$$\begin{aligned}
 \max \quad & v \\
 Af + dv &= 0 \\
 f &\leq b \\
 f &\geq 0 \\
 d_i &= \begin{cases} -1 & i = s \\ +1 & i = t \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Max-flow: primaali

- Voidaan muodostaa edellisen ongelman duaali, joka on siis duaalin duaali eli primaali.

$$\min \sum_{(x,y) \in E} \gamma(x,y)b(x,y)$$

$$\pi(x) - \pi(y) + \gamma(x,y) \geq 0, \text{ kaikille } (x,y) \in E$$

$$-\pi(s) + \pi(t) \geq 1$$

$$\pi(x) \leq 0$$

$$\gamma(x,y) \geq 0$$

Graafin leikkaus

Graafeille voidaan määrittää leikkaus eli cut.

Määritelmä: S-t-leikkaus

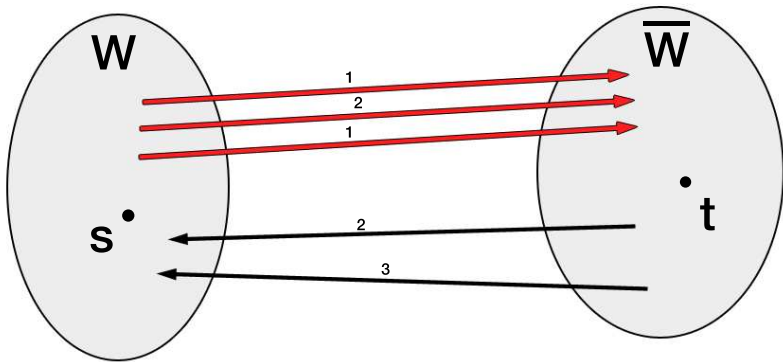
Jaetaan graafin solmut joukkoihin W ja \overline{W} , s.e. $s \in W$ ja $t \in \overline{W}$. Tätä jakoa kutsutaan s-t-leikkaukseksi (s-t cut).

Määritelmä: Leikkauksen kapasiteetti

Kaarien painojen summa, jotka kulkevat $W \rightarrow \overline{W}$.

$$C(W, \overline{W}) = \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ \text{s.e. } i \in W, j \in \overline{W}}} b(i,j)$$

Esimerkki



- $C(W, \bar{W}) = 1 + 2 + 1 = 4$ (punaiset nuolet)

Min-cut

Määritelmä: Min-cut

S-t-leikkaus, jolla pienin kapasiteetti $C(W, \overline{W})$.

Max-flow:n ja min-cut:n yhteys

- Jokainen s-t-leikkaus määrittää kelvon aloitusratkaisun max-flown LP:n primaalimuodolle kustannuksella $C(W, \overline{W})$
- Mikään s-t-virtaus $v = |f|$ ei ole suurempi kuin minkä tahansa s-t-leikkauksen kapasiteetti $C(W, \overline{W})$
- Voidaan todistaa, että max-flown arvo on yhtä suuri kuin min-cutin kapasiteetti
- Virtaus f ja leikkaus $C(W, \overline{W})$ ovat optimaaliset, joss

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 & (x, y) \in E, x \in \overline{W}, y \in W \\ f(x, y) = b(x, y) & (x, y) \in E, x \in W, y \in \overline{W} \end{cases}$$

Ford-Fulkerson-algoritmi

- Primaali-duaali-konstruktioon perustuva
- Ratkaisee max-flow/min-cut -ongelman äärellisessä määrässä askelia jos kapasiteetit ovat rationaalilukuja

Perusajatus

- 1 DRP \rightarrow etsitään polku lähtösolmusta maalisolmuun, jossa jokaisella polun kaarella on vapaata kapasiteettia eteenpäin, tai käytettyä kapasiteettia taaksepäin
- 2 Kasvatetaan tämän polun kautta virtausta lähtösolmusta maalisolmuun niillä kaarilla, jotka kulkevat eteenpäin, ja vähennetään niistä jotka kulkevat taaksepäin.
- 3 Toistetaan, kunnes ei löydy enää sopivia polkuja

Complementary slackness -ehdon perusteella ollaan optimipisteessä.

procedure Ford-Fulkerson

set $f := 0$;

AGAIN:

unset all labels, set $LIST := [s]$;

while $LIST \neq \emptyset$ do

let x be any node in $LIST$;

remove x from $LIST$;

scan x ;

if t is labeled then

augment flow f along augmentation path;

go to **AGAIN**;

procedure scan

label forward to all unlabeled nodes adjacent to x by arcs
that are unsaturated, putting newly labeled nodes on $LIST$;

label backward to all unlabeled nodes from which x is adjacent by
arcs that have positive flows, putting newly labeled nodes on $LIST$;

Ford-Fulkerson-algoritmi

- Äärellinen määrä askelia, jos b on rationaalinen
- Ongelmia, jos b sisältää irrationaalilukuja
 - Voi jäädä ikuisen silmukkaan
 - Voi konvergoitua epäoptimaaliseen lopputulokseen
 - Ei käytännössä ongelma tietokoneilla
- Parannettuja versioita olemassa
- Käytetään esim. nestevirtausten ja elektroniikkapiirien analyysissä

Yhteenveto

- Virtaukset voidaan esittää graafina
- Max-flow:n koko on sama kuin min-cut:n kapasiteetti
- Voidaan ratkaista Ford-Fulkersonilla (tietyillä ehdoilla)
- Kehittyneempiäkin algoritmeja löytyy

Kysymyksiä?