

T-61.140
Signaalinkäsittelyjärjestelmät
Kevät 2004

Esimerkkejä laskutehtävistä

Tehtäviä alkaen sivulta 2.
Vastauksia alkaen sivulta 19.
Kaavakokoelma alkaen sivulta 71.

Virheistä ja parannusehtotuksista voi laittaa viestiä osoitteeseen t61140@cis.hut.fi. Huomaa myös, että internetistä löytyy paljon tietoa ja esimerkkidemoja.

Aihealue	Tehtäviä
Kompleksiluvut, pariton ja parillinen funktio	1-5
Signaalit $x(t)$ ja sekvenssit $x[n]$, funktiot $\delta[n]$, $u[n]$	6
Signaalin ja sekvenssin jaksollisuus	7-8, 22, 37
Järjestelmät ja niiden ominaisuudet	9-12
Lohkokaaaviot (=virtauskaaviot)	9, 12, 18-19, 43, 45
Lineaariset ja aikainvariantit (LTI) järjestelmät	11-13, 18-20
Konvoluutio, dekonvoluutio	14-17
Impulssivaste $h[n]$	16, 18-19, 44-46
Jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-sarja	21-24
Diskreettiaikaisen sekvenssin Fourier-sarja	25-26
Jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-muunnos (CTFT)	27-31
Diskreettiaikaisen sekvenssin Fourier-muunnos (DTFT)	32-37
Diskreetti Fourier-muunnos (DFT), FFT	37
Suotimien taajuusanalyysi (taajuus-, amplitudi- ja vaihevaste)	38-39, 42-48
Konvoluutio- ja kertolaskuominaisuus	28, 40-41
Ryhmäviive, nousuaika, askelvaste	44, 46
Näytteenotto ja signaalin rekonstruointi	48-54
Matlab-komentoja	37, 43-44

- Ohjeita pistelaskareiden, välikokeiden ja tenttien tekemiseen
- esitä laskutehtävissä tarpeelliset **välivaiheet**, kommentteja ja perusteluja tarvittaessa
 - käytä A4-ruutupaperia tai konseptia
 - aloita jokainen tehtävä uudelta sivulta, alakohdat voi olla samalla. (Tämä nopeuttaa ja selkeyttää tehtävien tarkistamista.)
 - liitä jokaiseen paperiin yhteystiedot
 - palauta tehtävät järjestyksessä

T-61.140 Tehtäviä
Vastauksia tehtäviin sivulta 19.

- Esitä kaava asteiden muuttamiseksi radiaaneiksi ja päinvastoin.
- Piirrä yksikköympyrä.
 - Merkitse pisteet $A = (0, 0)$, $B = (-0.5, 0)$ ja $C = (-0.5, -\sqrt{3}/2)$. Mitkä ovat tämän suorakulmaisen kolmion ABC kulmien arvot?
 - Mitkä kaksi kulmaa välillä $-\pi \dots \pi$ toteuttavat $\sin(\omega) = -0.5$?
- Osoita
 - $zz^* = r^2$
 - $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

Kompleksilukujen kertausta (esimerkiksi s. 71 / Oppenheim).
Tärkeä Eulerin kaava $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j \sin(\omega)$.
Kompleksiluku z voidaan esittää suorakulmaisessa koordinaatistossa $z = x + jy$ (imaginaariyksikkö i tai j) tai polaarikoordinaatistossa $z = r e^{j\theta}$. Luvun z kompleksikonjugaatti on $z^* = x - jy = r e^{-j\theta}$ ja moduli (pituus origosta) $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Funktio voidaan jakaa parilliseen (*Even*) ja parittomaan (*Odd*) osaan:
 $Even\{x(t)\} = 1/2[x(t) + x(-t)]$ ja $Odd\{x(t)\} = 1/2[x(t) - x(-t)]$.
Olkoon $H(\omega) = e^{j\omega t}$. Laske:
 - $Even\{H(\omega)\}$
 - $Odd\{H(\omega)\}$
- Tutkitaan kompleksilukuarvoista funktiota $H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$. (Tämä osoittautuu myöhemmin tyyppiliseksi diskreettiaikaiseksi suotimeksi.) Laske arvot $H(\omega)$, $|H(\omega)|$ ja $\angle H(\omega)$, kun $\omega = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi\}$.

Määritellään yksikköimpulssifunktio $\delta[n]$ ja yksikköaskelfunktio $u[n]$ (joskus $\mu[n]$):

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = 0 \\ 0, & \text{kun } n \neq 0 \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \geq 0 \\ 0, & \text{kun } n < 0 \end{cases}$$

- Piirrä seuraavat signaalit ja sekvenssit origon ($t = 0$ tai $n = 0$) ympärillä.
 - $x_2(t) = 2 \cos(2\pi t - \pi/2)$
 - $x_3[n] = \sin(0.1\pi n)$
 - $x_4[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + 2\delta[n+1]$
 - $x_5[n] = \delta[-1] + \delta[0] + 2\delta[1]$
 - $x_6[n] = u[n] - u[n-4]$
 - $x_7[n] = x_4[2-n]$

Jatkuva-aikaisen (analogisen) signaalin jaksollisuus: $\exists T \in \mathbb{R}$ s. e. $x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbb{R}$. Eksponentti-, sini- ja kosinifunktio ovat jaksollisia $2\pi\omega$ suhteen. Sijoituksen $x(t+T)$ jälkeen on siis tarkoitus löytää sellainen arvo T :lle, että kulmaan lisätään aina vain 2π -monikertoja (katso tehtäviä alla).

Jos signaalissa $x(t)$ on useita sinikomponentteja, niin lasketaan ensin kaikkien jaksonajat T_i yksitellen ja etsitään pienin yhteinen jaksonaika T_0 , johon kaikki T_i :t menevät tasan.

Perusjako on pienin mahdollinen T_0 ; signaali on toki jaksollinen myös T_0 :n monikertojen suhteen.

Perustaaajuus on f_0 , jonka avulla kaikki muut signaalin taajuudet voidaan esittää sen harmonisina monikertoina. (Tähän palataan Fourier-sarjan yhteydessä.)

7. Mitkä seuraavista jatkuva-aikaisista signaaleista ovat jaksollisia? Määritä jaksollisten signaalien perusjakson pituus.

- $x(t) = 3 \cos(\frac{3\pi}{31}t)$
- $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$
- $x(t) = \cos(\frac{\pi}{8}t^2)$

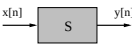
Diskreettiaikaisen (tai digitaalisen) signaalin eli sekvenssin (lukujonon) jaksollisuus: $\exists N \in \mathbb{Z}$ s. e. $x[n] = x[n+N], \forall n \in \mathbb{Z}$.
Tämä poikkeaa jaksollisen signaalin tarkastelusta vain siinä, että indeksi n ja jaksonaika N tulevat olla kokonaislukuja.

8. Mitkä seuraavista sekvensseistä ovat jaksollisia? Määritä jaksollisten sekvenssien perusjakson pituus.

- $x[n] = 3 \cos(\frac{3\pi}{8}n)$
- $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n - \pi)$
- $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n) - 2 \sin(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{6})$

9. Tarkastellaan kolmea järjestelmää S_1 , S_2 ja S_3 , joiden syöte-vasterelaatiot ovat:

$$\begin{aligned} S_1 : y[n] &= x[n] + 2x[n-2] \\ S_2 : y[n] &= x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2] \\ S_3 : y[n] &= \begin{cases} x[n/2], & n \text{ parillinen} \\ 0, & n \text{ pariton} \end{cases} \end{aligned}$$



Kuva 1: Tehtävät 9: Syöte $x[n]$, vaste $y[n]$ ja diskreettiaikainen järjestelmä $S(h[n])$.

- Olkoon syötteenä lukuono $x[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] - 2\delta[n-2] = \{3, 2, -2\}$. Anna kunkin järjestelmän ulostulojono.
- Esitä syöte-vasterelaatio sarjaankytkennälle S_1 ja S_2
- Esitä syöte-vasterelaatio rinnankytkennälle S_1 ja S_2
- *) Esitä syöte-vasterelaatio järjestelmälle, jossa ensin on S_3 , siihen sarjaankytkettynä S_1 :n ja S_2 :n rinnankytkentä, jonka jälkeen sarjassa invertoitu S_3 . Miksi lopputulos ei ole sama kuin kohdassa c?

Järjestelmillä voi olla erilaisia ominaisuuksia, joiden avulla niitä voidaan luokitella. Tällä kurssilla tärkeimpiä järjestelmiä ovat LTI-järjestelmät (linear and time-invariant), jotka ovat siis lineaarisia ja aikainvariantteja. LTI-järjestelmien kausaalisuutta ja stabiilisuuata voi helposti tutkia myös impulssivasteen avulla.

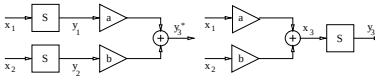
10. Tutki kutakin järjestelmää ja osoita, onko se

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| a) muistiton | b) lineaarinen (kuva 2) |
| c) aikainvariantti (kuva 3) | d) BIBO-stabiili |
| e) kausaalinen | |

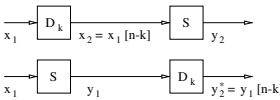
$$\begin{aligned} S_1 : y_1[n] &= 0.5 x[n+1] \\ S_2 : y_2[n] &= -0.5 x[-n-1] \\ S_3 : y_3[n] &= y_1[n] + y_2[n] = Odd\{x[n+1]\} \end{aligned}$$

11. *Järjestelmän ominaisuudet. Tutki, onko alla oleva järjestelmä

- lineaarinen ja/tai kausaalinen: $y[n] = ax[n-1] + b$, jossa a ja b ovat reaalisia vakioita
- stabiili ja/tai kausaalinen: $y[n] = x[n+2] + 0.5^n x[n+1]$
- lineaarinen ja/tai aikainvariantti: $y[n] = x^2[n] = (x[n])^2$
- aikainvariantti ja/tai stabiili: $y[n] = 2n x[n-1]$



Kuva 2: Lineaarisuuden osoittaminen. Jos $y_3 == y_3^*$, niin lineaarinen.

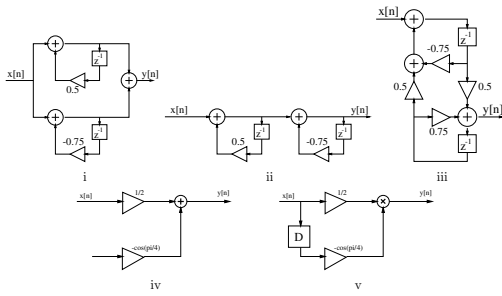


Kuva 3: Aikainvarianttisuuden osoittaminen. Jos $y_2 == y_2^*$, niin aikainvariantti.

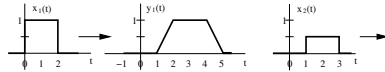
12. Tarkastele kuvan 4 lohkokaaaviokuvioita ja vastaa kysymyksiin, onko järjestelmä

- lineaarinen ja aikainvariantti (LTI)?
- takaisinkytketty?

13. Kuvassa 5 esitetty syöte $x_1(t)$ tuottaa erääseen lineaariseen aikainvarianttiin (LTI) järjestelmään syötettynä vasteen $y_1(t)$. Käyttämällä hyväksi LTI-järjestelmän ominaisuuksia, hahmottele saman järjestelmän vaste syötelle $x_2(t)$.



Kuva 4: Tehtävän 12 järjestelmien lohkokaariot



Kuva 5: Tehtävä 13. Lineaarisen aikainvariantin järjestelmän syöte ja vaste.

Konvoluutio jatkuville signaaleille ja diskreettiakaisille sekvensseille:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n - k]$$

Konvoluution voi yhdistää suodattamiseen siten, että jos $x[n]$ on syöte ja $h[n]$ impulssivaste, niin $y[n] = h[n] * x[n]$ on vaste.

14. Piirrä ensin lukujonot $x[n]$ ja $h[n]$. Laske sitten diskreettiakainen konvoluutiosumma

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n - k]$$

- a) $x[n] = \{1, 3, 2\}$, $h[n] = \{1, -1\}$
b) $x[n] = 2\delta[n - 1] + 3\delta[n - 2]$, $h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$

15. Laske seuraavien diskreettiakaisien järjestelmien konvoluutio kun

- a) $x[n]$ ja $h[n]$ ovat kuvan 6 kaltaiset (LTI)
b*) $x[n] = \alpha^n u[n]$
 $h[n] = \beta^n u[n]$, $\alpha \neq \beta$



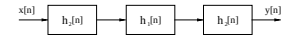
Kuva 6: Tehtävä 15: Järjestelmän syöte ja impulssivaste.

16. Tarkastellaan kuvassa 7 esitetyn kolmen lineaarisen aikainvariantin systeemin (LTI) kaskadikytkentää. Systeemitä tiedetään, että impulssivaste $h_2[n]$ on

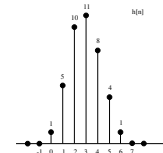
$$h_2[n] = u[n] - u[n - 2],$$

ja että koko systeemin impulssivaste on kuvassa 8 esitetyn kaltainen. (Vihje: LTI-järjestelmille pätee esim. $(h_1 * h_2) * h_3 = h_2 * (h_1 * h_3)$.)

- a) Mikä on impulssivasteen $h_1[n]$ nollasta poikkeavan osan pituus? Etsi impulssivaste $h_1[n]$.
b) Mikä on systeemin vaste kun syöte on $x[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$?



Kuva 7: Tehtävä 16: Kolmen LTI-systeemin kaskadi.



Kuva 8: Tehtävä 16: Kaskadisysteemin impulssivaste.

17. Laske konvoluutio

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]$$

missä

$$x[n] = 3^{-|n|} = 3^n u[-n - 1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n + 3]$$

- a) käyttämällä suoraan konvoluution määritelmää,
b) käyttämällä konvoluution osittelulakia $((x_1 + x_2) * h = (x_1 * h) + (x_2 * h))$.

LTI-järjestelmät jaetaan yleensä kahteen luokkaan niiden impulssivasteen pituuden perusteella: (1) Äärellisen pitkän impulssivasteen (FIR = Finite (length) impulse response) suotimet, ja (2) Äärettömän pitkän impulssivasteen (IIR = Infinite (length) impulse response) suotimet.

18. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälönä

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

- a) Piirrä systeemin lohkokaavio.
b) Määritä systeemin impulssivaste $h[n]$.
c) Mikä on systeemin vaste syötteellä $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$.

19. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälönä

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 1] = x[n]$$

- a) Piirrä systeemin lohkokaavio.
b) Määritä systeemin impulssivaste $h[n]$, kun $0 \leq n \leq 4$. Miten impulssivaste käyttäytyy n :n suuremmilla arvoilla?
c*) Mikä on systeemin vaste (ratkaise differenssiyhtälö!), kun syöte on $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$. (Vihje: yrite, homogeeninen yhtälö, erityinen yhtälö TAI z-muunnos.)

20. Tarkastellaan järjestelmiä S_1 ja S_2 kompleksisella syötteellä $e^{j\pi n/6}$. Riittävätkö annetut tiedot osoittamaan, että järjestelmä S_1 tai S_2 ei ainakaan ole LTI? (Kappale 3.2)

$$S_1 : e^{j\pi n/6} \rightarrow e^{j3\pi n/7}$$

$$S_2 : e^{j\pi n/6} \rightarrow 0.23 e^{j\pi n/6}$$

Jaksollisen jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-sarjaesitys esitellään luvussa 3.3 ja sen ominaisuuksia luvussa 3.5 sekä taulukossa 3.1 sivulla 206 (Oppenheim, Willsky).
Jaksollisen jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-sarjaesitys:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Tässä ω_0 (Ω_0) on peruskulmataajuus, f_0 perustaaajuus, ja T_0 (T) perusjaksonpituus. Jatkuvalle $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$, $T_0 = \frac{1}{f_0}$.

21. Tiedetään, että $a_0 = 0$, $a_1 = a_{-1} = 2$, $a_2 = a_{-2} = 0$, $a_3 = a_{-3} = -1$, $a_k = 0$ muulloin.
b) Muodosta synteesiyhtälöllä $x(t)$, kun perusjakson pituus on 4. (Kappale 3.3)

22. Määrittää seuraavien jaksollisten signaalien peruskulmataajuudet ja Fourier-kertoimet analyysiyhtälöllä

- a) $x_1(t) = e^{-j\omega_0 t}$, (kompleksinen signaali)
b) $x_2(t) = \cos(2\pi t) + \cos(3\pi t)$, (reaalinen signaali)

23. Jaksollinen signaali $x(t)$, jonka perusjakso on 2 on määritelty seuraavasti:

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

- a) Piirrä $x(t)$, kun $t \in -2 \dots 5$.
b) Määrittää Fourier-kertoimen a_0 . Mitä se esittää?
c) Määrittää derivaatan $\frac{dx(t)}{dt}$ Fourier-sarja.
d*) Käytä edellistä tulosta ja Fourier-sarjan derivointiominaisuutta (taulukosta: $\frac{dx(t)}{dt} \dots jk\omega_0 a_k$) ja laske $x(t)$:n Fourier-kertoimet.

24. *Signaalista $x(t)$ tiedetään, että

- i) $x(t)$ on reaaliarvoinen
ii) $x(t)$ on jaksollinen perusjaksolla $T = 6$
iii) $a_k = 0$, kun $k = 0$ ja $k > 2$
iv) $x(t) = -x(t - 3)$
v) $\frac{1}{6} \int_{-3}^3 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$
vi) a_1 on positiivinen reaaliluku

Osoita, että $x(t) = A \cos(Bt + C)$ ja laske vakiot A , B ja C .

Jaksollisen diskreettiakaisen sekvenssin Fourier-sarjaesitys esitellään luvussa 3.6 ja sen ominaisuuksia luvussa 3.7 sekä taulukossa 3.2 sivulla 221 (Oppenheim, Willsky).

Jaksollisen diskreettiakaisen sekvenssin Fourier-sarjaesitys:

$$x[n] = \sum_{k=(N)} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

Tässä ω_0 on peruskulmataajuus, f_0 perustaaajuus, N_0 (N) perusjaksonpituus, ja f_s (F_s) näytteenottotaajuus, joka useimmiten voidaan skaalata ja merkitä olevan $f_s = 1$. Diskreettiakaiselle sekvenssille $\omega_0 = 2\pi f_0/f_s = 2\pi T_s/N_0$, $N_0 = \frac{1}{f_0}$, siten että $N, n \in \mathbb{Z}$. Kun $f_s = 1$, $T_s = 1$, niin $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/N_0$.

25. Tiedetään, että perusjakson pituus $N = 5$ ja kertoimet $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = 2$, $a_2 = a_{-2} = -1$. Muodosta synteesiyhtälöllä $x[n]$. (Kappale 3.6)

26. Määrittää seuraavien jaksollisten sekvenssien peruskulmataajuudet ja Fourier-kertoimet analyysiyhtälöllä

- a) $x_1[n] = \cos(\pi n/3)$
b) $x_2[n] = \sin(\pi n/2) + \cos(\pi n/4)$

Jatkuva-aikaisen signaalin Fourier-muunnos $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ johdettiin Fourier-sarjoista ajattelemalla jaksonaika äärettömän pitkäksi. Näin saatiin:

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Huomaa myös taulukot 4.1 (s. 328, Properties of the F-transform) ja 4.2 (s. 329, Basic F-transform pairs). Ensimmäisestä on usein apua tehtävissä, joissa tiedetään signaalin $x(t)$ F-muunnos $X(j\omega)$ ja halutaan etsiä joku $x(t)$ johdetun signaalin F-muunnos. Jälkimmäisessä on suoraan tiedettyjä muunnoksia.

27. Kirjan esimerkit 4.4 ja 4.5: integrointiharjoitus, sinc-funktio ja duaalisuus.

a) Laske Fourier-muunnos määritelmän mukaan signaalille

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

b) Esitä a-kohdassa saatu F-muunnos sinc-funktion avulla, $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}$

28. F-muunna seuraavat signaalit ja impulssivaste **käyttäen hyväksi taulukkoa** ja aiempia tuloksia. (Vinkit: aikasiirto (a), aikasiirto ja lin. (b), aikasiirto (c), derivointi ajassa (d).)

a) $x(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

b) $x(t) = (x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

c) $h(t) = (h_2(t-2)) = e^{-(t-2)} u(t-2)$

d) $x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$

29. Konvoluutio-ominaisuutta (s. 314) käyttäen voidaan differentiaaliyhtälö ratkaista näppärästi algebrallisesti (ilman yrittäviä, vertaa tehtävä 19c):

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \leftrightarrow \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Laske impulssivasteiden $h_1(t) = e^{-0.5t} u(t)$ ja $h_2(t) = 2e^{-t} u(t)$ konvoluutio käyttämällä F-muunnoksen konvoluutio-ominaisuutta. Tällöin aikatason konvoluutio $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$ lasketaan F-muunnosten $H_1(j\omega)$ ja $H_2(j\omega)$ kertolaskuna $H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$ ja tämä tulos käänteismuunnetaan takaisin aikatasoon $H(j\omega) \leftrightarrow h(t)$.

30. *Fourier-käänteismuunnos

a) Laske käänteinen Fourier-muunnos

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

b) Esitä a-kohdassa saatu signaali sinc-funktion avulla, $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}$

c) Esitä suorakaidepulsin ja sinc-funktion duaaliominaisuudet Fourier-muunnoksessa (s. 309-310).

31. *Lisää laskentaa

a) Laske $h(t) = e^t u(-t)$ ja $x(t) = e^{-t} u(t)$ konvoluutio $y(t) = h(t) * x(t)$ käyttämällä konvoluutio-ominaisuutta.

b) Laske $R(j\omega)$, kun $r(t) = e^{-|t|} \cos(2t)$. R_1 integroimalla, R_2 taulukosta, näiden konvoluutio.

Diskreetti aikaisen sekvenssin Fourier-muunnos (DTFT)

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Huomaa myös taulukot 5.1 (s. 391, Properties of the d-t F-transform) ja 5.2 (s. 392, Basic d-t F-transform pairs).

HUOM! Diskreetissä Fourier-muunnoksessa (DFT) myös taajuusalue on diskreetti (taajuihen).

32. Laske seuraavien sekvenssien diskreetti aikaiset Fourier-muunnokset:

a) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$

b) $x[n] = (\frac{1}{2})^{n-1} u[n-1]$

33. Tunnetaan reaalinen sekvenssi $x[n]$ ja sen diskreetti aikainen Fourier-muunnos $X(e^{j\omega})$. Olkoon taajuudella $\omega_c = \pi/4$: $X(e^{j(\pi/4)}) = 3 + 4j$. Päättele jaksollisuuden avulla ja laske

a) $|X(e^{j(\pi/4)})|$

b) $\angle X(e^{j(\pi/4)})$

c) $X(e^{j(\pi/4)})$

d) $X(e^{j(\pi/4+2\pi)})$

e) Jos $f_s = 4000$ Hz, niin mikä on tutkittava taajuus f_c

34. Laske jaksollisen sekvenssin $x[n] = \sin((\pi/6)n + \pi/4)$ diskreetti aikainen Fourier-muunnos $X(e^{j\omega})$. Hahmottele kuvaajat $|X(e^{j\omega})|$ ja $\angle X(e^{j\omega})$.

35. Olkoon $X(e^{j\omega})$ kuvassa 9 esitetyn signaalin $x[n]$ Fourier-muunnos. Tutki taulukon 5.1 ominaisuuksia. Fourier-muunnosta $X(e^{j\omega})$ ei tarvitse määrittää missään kohdassa, kun huomaa käyttäen symmetrisyyttä $x[n-2]!$

a) Laske $X(e^{j0})$.

b) Etsi $\angle X(e^{j\omega})$.

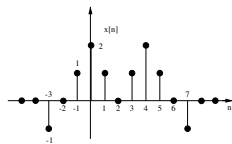
c) Laske $\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$.

d) Etsi $X(e^{j\pi})$.

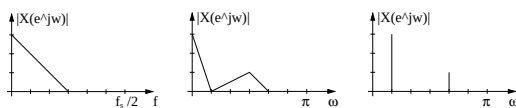
e) Määritä $\int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$ ja $\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$.

f) Laske $-\frac{d}{d\omega} \angle X(e^{j\omega})$.

g) Määritä ja piirrä signaali, jonka Fourier-muunnos on $\Re\{X(e^{j\omega})\}$.



Kuva 9: Tehtävä 35 Diskreetti aikainen sekvenssi $x[n]$.



Kuva 10: Tehtävä 36: Spektrejä kaistalla $[0 \dots f_s/2]$ tai $[0 \dots \pi]$.

36. Diskreetti aikainen Fourier-muunnos on 2π -jaksollinen, itseisarvon $|X(e^{j\omega})|$ ollessa parillinen ja $\angle X(e^{j\omega})$ pariton funktio. Kuvassa 10 on reaalisen sekvenssin $x[n]$ Fourier-muunnoksen itseisarvo $|X(e^{j\omega})|$. Hahmottele kukin $|X(e^{j\omega})|$ alueelle $-2f_s \dots 2f_s$.

Näytteenottotaajuuden f_s , näytteenottokulmataajuuden ω_s ja näyteenvälillä T_s yhteys on $f_s = \omega_s/(2\pi) = 1/T_s$. Esimerkiksi $f_s = 44100$ Hz $\Rightarrow$ näytteiden välinen aika on $22,7 \mu s$.

37. Matlabin **fft(x)**-komento palauttaa sekvenssin **x** diskreetin Fourier-muunnoksen (discrete Fourier transform, DFT):

$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Tässä siis spektri on myös lukujono spektrikomponenttien arvoja. Täten laskuoperaatio voidaan toteuttaa tietokoneella.⁴

Yhdistä kuvan 11 vasemman sarakkeen sekvenssit ja oikean sarakkeen tehospesit $|X(e^{j\omega})|^2$. Vinkki: Yksi jaksollinen kosini taajuudella f_i luo yhden piikin spektriin positiiviselle taajuudelle f_i .

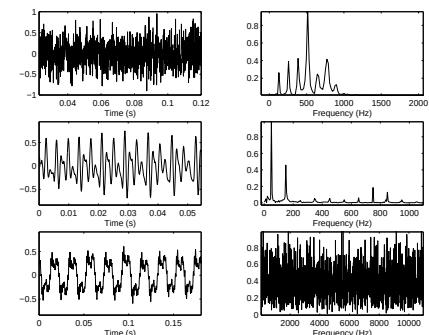
Tehty Matlabilla:

```
[x, fs, nbits] = wavread('aani.wav'); % luetaan äänisignaali
soundsc(x, fs); % kuunnellaan
M = length(x);
t = [1 : length(x)] / fs; % aika-akseli
plot(t, x); % piirretään aaltomuoto
xlabel('Time (s)');
```

```
xF = fft(x); % lasketaan DFT
M = length(xF);
```

⁴Diskreetti aikaisessa Fourier-muunnoksessa, DTFT, $X(e^{j\omega})$ saa $\omega \in \mathbb{R}$. Kun Jos esimerkiksi Matlab antaa kuvaajan $X(e^{j\omega})$ -sta, se on useimmiten laskettu riittävän monen pisteen DFT:tä käyttäen.

```
w = linspace(0, (M-1)/M*fs, M); % taajuusakseli
plot(w, xF.*conj(xF)); % piirretään |X(exp(jw))|^2
xlabel('Frequency (Hz)');
```



Kuva 11: Tehtävä 37: Sekvenssit (vasen sarake) ja spektrit (oikea).

LTI-suotimet ovat laskennallisesti yksinkertaisia. Niiden input-output-relaatio voidaan esittää differenssiyhtälöllä. Niillä pystytään tekemään taajuusselektiivisiä suotimia, joilla voidaan vaimentaa haluttuja signaalin spektrin kaistoja.

38. Hahmottele seuraavien suodintyyppien amplitudivasteet taajuustasossa:

a) alipäästösuodin

c) kaistanestosuodin

b) ylipäästösuodin

d) kaistanpäästösuodin

39. Tarkastellaan jatkuvaa periodista signaalia $x(t)$, joka on määritelty seuraavasti:

$$x(t) = \cos(2\pi t) + 0.3 \cos(20\pi t)$$

a) Hahmottele signaali $x(t)$ aikatasossa.

b) Määritä signaalin $x(t)$ peruskulmataajuus ja Fourier-sarjaesityksen kertoimet a_k .

c) Signaalia $x(t)$ suodatetaan ideaalisella alipäästösuotimella, jonka rajakulmataajuus $\omega_c = 10\pi$. Piirrä suodatettu signaali.

d) Signaalia $x(t)$ suodatetaan ideaalisella ylipäästösuotimella, jonka rajakulmataajuus $\omega_c = 10\pi$. Piirrä suodatettu signaali.

40. Konvoluutio-ominaisuutta (s. 382)

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \leftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

käyttäen ratkaise $y[n]$ (vrt tehtävä 19c ja 29)

- a) $h[n] = (\delta[n-1] - \delta[n-2])$, $x[n] = 0.6^n u[n]$
 b) $h[n] = 0.4^{n-1} u[n-1]$, $x[n] = (-0.7)^n u[n]$

41. Käytä hyväksesi kertolaskuominaisuutta (s. 388)

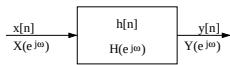
$$y[n] = h[n] \cdot x[n] \quad \leftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Signaalin $x[n]$ ja $g[n]$ Fourier-muunnokset ovat $X(e^{j\omega})$ ja $G(e^{j\omega})$. Lisäksi on voimassa yhtälö

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) G(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = 1 + e^{-j\omega}$$

- a) Jos $x[n] = (-1)^n$ niin määrää diskreetti signaali $g[n]$ siten, että sen Fourier-muunnos $G(e^{j\omega})$ toteuttaa ylläolevan yhtälön. Onko olemassa muita ratkaisuja $g[n]$?
 b) Toista edellinen kohta signaalille $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$.
42. Ylipäästö- ja kaistanpäästösuodattimia suunniteltaessa toteutetaan usein ensin alipäästösuodatin, jolla on halutut ominaisuudet ja sen jälkeen muunnetaan se HP- tai BP-suotimeksi. Etuna tästä on, että kaikkien suodintyyppien toteutukseen riittävät pelkistään alipäästösuodattimen suunnittelualgoritmit. Tarkastellaan esimerkiksi diskreetti-ai-kaista alipäästösuodatinta, jonka impulssivaste on $h_{lp}[n]$ ja taajuusvaste $H_{lp}(e^{j\omega})$. Moduloidaan impulssivastetta jaksolla $(-1)^n$, niin että $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$.
- a) Määritä $H_{hp}(e^{j\omega})$ $H_{lp}(e^{j\omega})$:n avulla. Osoita, että $H_{hp}(e^{j\omega})$ on ylipäästösuodattimen taajuusvaste.
 b) Osoita, että diskreetti-ai-kaisten HP-suodattimen impulssivasteen modulointi jaksolla $(-1)^n$ tuottaa alipäästösuodattimen.

43. Lineaarisen vakiokertoimisen differenssiyhtälön karakterisoima LTI-järjestelmä (s. 396-399). Aikatakon konvoluutio vastaa taajuustasossa muunnosten kertolaskua $y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$ (katso kuva 12).



Kuva 12: Tehtävä 43: $y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$

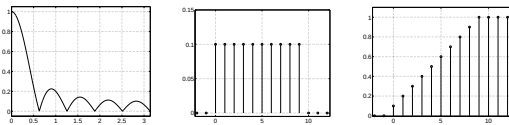
Muistetaan alkukurssista, että kausaalista, diskreettiä LTI-järjestelmää kuvaa vakioker-toiminen differenssiyhtälö

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Kun F-muunnoksessa käytetään hyväksi viivästysominaisuutta ($x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$), saadaan

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

Tässä $X(e^{j\omega})$ ja $Y(e^{j\omega})$ ovat selvästi vakioita indeksi k suhteen, joten ne voidaan ottaa ulos summasta. Konvoluutio-ominaisuuden ($Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$) huomioon ottaen impulssivasteen $h[n]$ Fourier-muunnos $H(e^{j\omega})$ eli taajuusvaste on



Kuva 13: Tehtävä 44: $H_2(e^{j\omega})$: Amplitudivaste $|H_2(e^{j\omega})|$, impulssivaste $h_2[n]$ ja askelvaste $s_2[n]$.

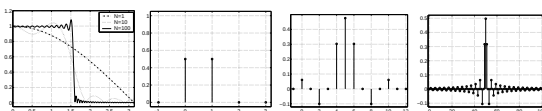
*i) Matlabin komennot?

45. Kausaalinen ja stabiili LTI-systeemi on määrätty seuraavan differenssiyhtälön avulla:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

- a) Piirrä lohkokaavio.
 b) Laske taajuusvaste $H(e^{j\omega})$.
 c) Hahmottele $|H(e^{j\omega})|$.
 d) Laske impulssivaste $h[n]$.

46. Tutki seuraavissa kuvissa esitettyjä realisoitujen suotimen amplitudi- ja impulssivasteita.



Kuva 14: Tehtävä 46: Vasemmalla toteutetun suotimen $|H(e^{j\omega})|$ amplitudivaste arituilla $N = \{1, 10, 100\}$ ja kunkin suotimen $h_1[n]$, $h_{10}[n]$, $h_{100}[n]$ impulssivaste.

- a) Miten suotimen asteluku vaikuttaa päästö- ja estokaistan väliseen siirtymäkaistaan (transition band)?
 b) Miten suotimen asteluku vaikuttaa ryhmäviiveeseen, kun kaikki toteutukset ovat lineaarivaiheisia suotimia.
 c) Mikä on askelvasteen nousuajan (suotimen nopeus) ja siirtymäkaistan leveyden suhde?

*d) Millaiselta ideaalisuodin näyttäisi? Mitä tarkoittaa suotimen realisaatio? Mitä suotimen suunnittelussa lasketaan? Miten digitaalinen suodin voidaan tehdä?

47. Jatkuva-aikaisen, kausaalisen ja stabiilin LTI-systeemin taajuusvaste on $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$

- a) Osoita, että $|H(j\omega)| = A$ ja laske A
 b) Minkä tyyppinen suodin on kyseessä?

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

Tunnetaan LTI-järjestelmä S sen impulssivasteen avulla $h[n] = \frac{1}{3}(-\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2])$.

- a) Kirjoita differenssiyhtälö ja piirrä aikatasossa lohkokaavio, jossa $x[n]$ tulee vasemmalta järjestelmään S ja ulostulona on $y[n]$.
 b) Kirjoita $H(e^{j\omega})$ eli määrää kertoimet b_0 , b_1 ja b_2 . Mitä tulee jakajaan arvoiksi a_k ?
 c) Onko kyseessä ali- vai ylipäästösuodin?

Usein halutaan analysoida LTI-suotimen käytöstä. Lähtötilanteena voi olla (a) suotimen lohkokaavioesitys, (b) impulssivaste $h[n]$, (c) differenssiyhtälö $y[n] = \dots$ tai (d) taajuusvaste $H(e^{j\omega})$. Kaikki nämä ovat yksikäsitteisiä, joten kun yksi näkökulma tunnetaan, voidaan muutkin laskea tai havainnollistaa.

Lohkokaaaviosta tai differenssiyhtälöstä nähdään usein suotimen käytännön toteutus, laskenta-algoritmi. Impulssivaste $h[n]$ kertoo suotimen käytöksen aikatasossa. Impulssivasteen Fourier-muunnos $H(e^{j\omega})$ kertoo käytöksestä taajuustasossa.

Kuten tehtävässä 43 huomattiin, äärellisen pitkän impulssivasteen (FIR = Finite (length) impulse response) taajuusvaste $H(e^{j\omega})$ on $e^{j\omega}$:n suhteen yksinkertainen polynomi. Jos impulssivaste on äärettömän pitkä (IIR = Infinite (length) impulse response), niin taajuusvaste $H(e^{j\omega})$ on rationaalilauseke, jossa sekä osoittajassa että nimittäjässä on polynomilauseke.

LTI-järjestelmissä impulssivasteesta $h[n]$ voidaan nähdä järjestelmän kausaalisuus ja stabiilisuus. Jos $h[n] = 0$, kaikilla arvoilla $n < 0$, niin järjestelmä on kausaalinen. Jos $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$, niin järjestelmä on stabiili.

44. Olkoon annettuna taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot (1 + e^{-j\omega})$. Taajuusvaste voidaan hajottaa amplitudi- ja vaihevasteeseen $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$.

- a) Määrää impulssivaste $h[n]$, piirrä se ja järjestelmän lohkokaaavio.
 Vinkki: FIR-tapauksissa $H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] e^{-jn\omega}$; IIR kts. tehtävä 45.
 b) Laske ja piirrä askelvaste $s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m]$.
 c) Hahmottele $H(e^{j\omega})$:n kuvaaja **kompleksitasoon**, kun ω saa arvoja $0.. \pi$. Laske muutamia arvoja ja hahmottele "pehmeästi" niiden väliltä.
 d) Laske amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ (kompleksiluvun itseisarvo) ja hahmottele se välillä $0.. \pi$.
 e) Laske vaihevaste $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ (kompleksiluvun kulma) ja hahmottele se välillä $0.. \pi$.
 f) Desibeli-asteikolla teholliset amplitudiarvot saadaan laskemalla $10 \log_{10} |H(e^{j\omega})|^2 = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$. Hahmottele d-kohdan amplitudivaste nyt desibeli-asteikolla.
 g) Ryhmäkulkaika/ryhmäviive/etenemisviive saadaan vaihevasteesta $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\}$. Laske $\tau(\omega)$. Mikä on sen yhteys impulssivasteeseen?
 h) Alla on annettu toisen suotimen $H_2(e^{j\omega}) = 0.1 \sum_{k=0}^9 e^{-jk\omega}$ amplitudivaste, impulssivaste ja askelvaste. Mitkä ovat suotimen $H(e^{j\omega})$ ja $H_2(e^{j\omega})$ erot kaistanleveyksissä ja (askelvasteiden) nousuajoissa? Nousuaika on aika, jossa askelvaste nousee 10 %:sta loppuarvostaan 90 %:iin.

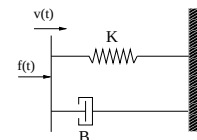
- c) Määritä, mikä seuraavista väitteistä pitää paikkansa ryhmäviiveelle $\tau(\omega) = -d(\arg H(j\omega))/d\omega$:

- i) $\tau(\omega) = 0$, kun $\omega > 0$ ii) $\tau(\omega) > 0$, kun $\omega > 0$ iii) $\tau(\omega) < 0$, kun $\omega > 0$

48. *Tutkitaan kuvassa 15 esitettyä mekaanista systeemiä. Systeemin liikeyhtälö on muotoa

$$Bv(t) + K \int v(t) dt = f(t).$$

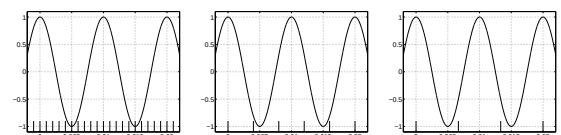
- a) Oletetaan, että vaste on $f_s(t)$, josta kokoon puristava voima. Kirjoita differentiaaliyhtälö $f_s(t)$:n ja $f(t)$:n avulla, etsi systeemin taajuusvaste ja osoita, että se approksimoi LP-suodinta.
 b) Oletetaan, että vaste on $f_d(t)$, hydraulista vaimenninta puristava voima. Kirjoita differentiaaliyhtälö $f_d(t)$:n ja $f(t)$:n avulla, etsi systeimin taajuusvaste ja osoita, että se approksimoi HP-suodinta.



Kuva 15: Tehtävän 48 järjestelmä.

Näytteenotossa jatkuvasta signaalista otetaan yleensä tasavälisin ajoin näytteitä, jolloin saadaan lukujono. On olemassa myös täysin synteettisiä lukujonoja, jotka voidaan rekonstruoida jatkuvaksi signaaliksi (tietokoneäännet yms.)

49. Näytteistä kuvassa 16 olevaa jatkuvaa kosinisisignaalista $x(t) = \cos(2\pi 100 t)$ kolmella näytteenottovälillä (i) 0.001 s, (ii) 0.004 s, (iii) 0.00666 s, ja piirrä diskreetit arvot kuvaajiin. Tarkista näytteenottotaajuuden "riittävyys" ja hahmottele diskreetteistä näytteistä $x[n]$ jatkuvaksi palautettu signaali $\hat{x}(t)$.



Kuva 16: Tehtävä 49: $x(t)$, näytteistä $x[n]$ käyttäen (i) 0.001 s, (ii) 0.004 s, (iii) 0.00666 s

50. Osoita, että jaksollinen impulssijuna $p(t)$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

voidaan esittää Fourier-sarjana

$$p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi/T_s)kt}$$

jossa $\omega_s = 2\pi/T_s$ on näytteenottokulmataajuus.

51. *Edellisen tehtävän impulssijunan Fourier-muunnos voidaan esittää myös muodossa

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Näytteistäminen voidaan mallittaa aikatazon kertolaskulla $x[n] = x_p(t) = x(t)p(t)$. Mikä on $X_p(j\omega)$ mielivaltaiselle syötespektrille $X(j\omega)$?

Vinkit: jaksollisen signaalin (Fourier-sarja) Fourier-muunnosesitys

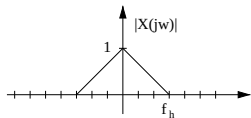
$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Signaalin kertolasku aikatasossa vastaa muunnosten konvoluutiota taajuustasossa:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [X_1(j\omega) * X_2(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\theta) X_2(j(\omega - \theta)) d\theta$$

52. Tunnetaan jatkuvan signaalin $x(t)$ spektri $|X(j\omega)|$, joka on piirretty kuvaan 17. Signaalin korkein taajuuskomponentti on f_h . Näytteistetään signaalia näytteenottotaajuudella f_s eli näytteet otetaan $T_s = 1/f_s$ välein: $x[n] = x(nT_s)$. Hahmottele diskreetin signaalin spektri $|X(e^{j\omega})|$, kun

- a) $f_h = 0.25 f_s$
b) $f_h = 0.5 f_s$
c) $f_h = 0.75 f_s$



Kuva 17: Tehtävä 52: Spektri $X(j\omega)$

53. Tarkastellaan jatkuva-aikaista jaksollista signaalia $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi 100 t) + \cos(2\pi 300 t) + \cos(2\pi 750 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

jossa siis kosinitaajuudet 100, 300 ja 750 Hertziä. Signaali näytteistetään taajuudella f_s . Toisin sanoen, $T_s = 1/f_s$, $p(t) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi f_s)kt}$. Näin saadaan diskreetti sekvenssi $x[n] = x_p(t) = x(nT_s)$.

- a) Hahmottele $x(t)$:n spektri (kosini vastaa piikkiä taajuustasossa)

- b) Hahmottele $x[n]$:n spektri, kun f_s on

- i) 1600 Hz ii) 800 Hz iii) 400 Hz

54. Signaalin rekonstruointi näytteistä

- a) Piirrä mielivaltainen kaistarajoitettu $X(j\omega)$, jonka suurin kulmataajuus on ω_M .
b) Näytteistä signaali näytteenottokulmataajuudella $\omega_s > 2\omega_M$. Piirrä näytteistetyin signaalin spektri $X_p(j\omega)$.
c) Näytteistettyä signaalia on voitu suodattaa digitaalisella suotimella, toisin sanoen, lukujonolle on voitu tehdä muutoksia. Rekonstruoi signaali (spektri) takaisin jatkuvaksi käyttämällä ideaalista alipäästösuodinta $H(j\omega)$, jonka rajataajuus ω_c on $\omega_M < \omega_c < 0.5\omega_s$. Piirrä palautetun signaalin spektri $X_r(j\omega) = X_p(j\omega)H(j\omega)$.
d) Esitä edellisen kohdan yhtälö aikatasossa $x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p(k)h(t - kT)$ Mikä on c-kohdan ideaalisen alipäästösuotimen $H(j\omega)$ impulssivaste $h(t)$?

T-61.140 Vastauksia tehtäviin

1. Ympyrän 360 astetta vastaa 2π :ä. Eli:

$$\frac{\text{DEG}}{360} = \frac{\text{RAD}}{2\pi}$$

Esimerkiksi suorakulma on $\pi/2$. Jatkossa käytetään lähinnä radiaaneja perusvälillä $-\pi \dots +\pi$.

2. Eksponenttifunktio $e^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$ piirtää yksikköympyrän, kun $\omega = -\pi \dots +\pi$. Nähdään: $|e^{j\omega}| = |\cos(\omega) + j\sin(\omega)| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = 1$.

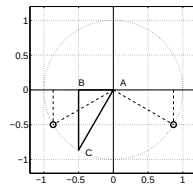
- a) Suorakulmaisen kolmion (Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$) kulmat:

$$\angle ABC = \pi/2$$

$$\angle BCA = \arctan\left(\frac{0.5}{\sqrt{3}/2}\right) = (1/6)\pi$$

$$\angle CAB = \pi - \pi/2 - \angle BCA = (1/3)\pi$$

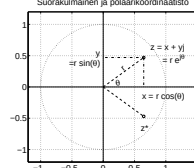
- b) Laskin antaa radiaaneissa $\arcsin(-0.5) = -0.5236 \approx -\pi/6$, ja yksikköympyrästä voidaan tarkistaa, että halutut kulmat ovat $\omega_1 = -\pi/6$ ja $\omega_2 = -5\pi/6$. Voidaan siis nähdä, että $x = \cos(\omega)$ ja $y = \sin(\omega)$.



3. Kompleksilukuja suorakulmaisessa ja polaarikoordinaatistossa.

- a) Polaarik.: $z z^* = r e^{j\theta} r e^{-j\theta} = r^2 e^{j(\theta-\theta)} = r^2$, suorakulmainen: $z z^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$.

- b) $(z_1 + z_2)^* = (x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2)^* = (x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2))^* = x_1 + x_2 - j(y_1 + y_2) = x_1 - jy_1 + x_2 - jy_2 = z_1^* + z_2^*$



4. Parilliset ja parittomat funktiot:

Funktio $f(x)$ on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$ (kuvasessa vasemmalla)

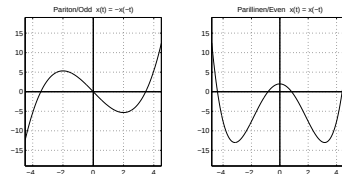
Funktio $f(x)$ on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$ (oikealla).

Sini on pariton funktio ja kosini on parillinen funktio. Mikä tahansa funktio $f(x)$ voidaan ilmaista parittoman ja parillisen komponentin summana:

$$f(x) = \mathcal{E}ven\{f(x)\} + \mathcal{O}dd\{f(x)\}, \text{ missä}$$

$$\mathcal{E}ven\{f(x)\} = 1/2[f(x) + f(-x)]$$

$$\mathcal{O}dd\{f(x)\} = 1/2[f(x) - f(-x)]$$



$$\begin{aligned} \mathcal{E}ven\{H(\omega)\} &= \mathcal{E}ven\{e^{j\omega}\} = \frac{1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) + \cos(-\omega) + j\sin(-\omega)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) + \cos(\omega) - j\sin(\omega)) = \cos(\omega) \\ \mathcal{O}dd\{H(\omega)\} &= \mathcal{O}dd\{e^{j\omega}\} = \frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) - \cos(-\omega) + j\sin(-\omega)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\omega) + j\sin(\omega) - \cos(\omega) + j\sin(\omega)) = j\sin(\omega) \end{aligned}$$

5. Tutkitaan kompleksilukuarvoista funktiota $H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$. Lasketaan taulukkoon kysytyt arvot. Jos laskimesi tukee kompleksiarvoisen eksponenttifunktion laskemista, voit käyttää suoraan $H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$, muuten hajota Eulerin kaavalla $H(\omega) = 1 - \cos(\omega) + j\sin(\omega)$.

Huomaa parillisen kosinin ja parittoman sinin laskusäännöt:

$$\cos(-\omega) = \cos(\omega) \text{ ja } \sin(-\omega) = -\sin(\omega).$$

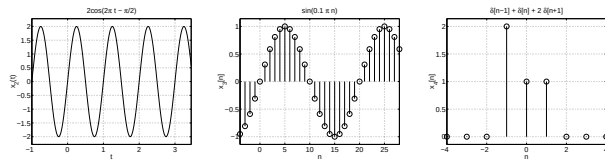
ω	$H(\omega)$	$ H(\omega) $	$\angle H(\omega)$
0	0	0	0 *
$\pi/4$	0.2929 + 0.7071j	0.7654	0.3750 π
$\pi/2$	1.0000 + 1.0000j	1.4142	0.2500 π
$3\pi/4$	1.7071 + 0.7071j	1.8478	0.1250 π
π	2	2	0

*) epäjatkuvuuskohta, $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle H(\omega) = +0.5\pi$, $\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle H(\omega) = -0.5\pi$.

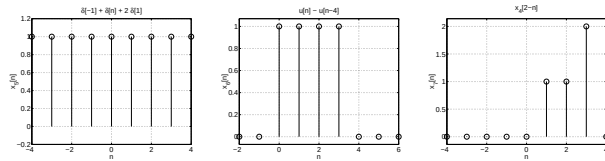
Vaihtoehtoisesti voit ajatella laskun "osoittimen" avulla $H_1(\omega) + H_2(\omega)$: $H_1(\omega) = 1$, joka on siis vakio ja jolla siirrytään origosta kohtaan (1,0), ja summataan siihen $H_2(\omega) = -e^{-j\omega}$, joka piirtää 1-säteisen yksikköympyrän puolikkaan.

6. Piirrä seuraavat signaalit ja sekvenssit origon ($t = 0$ tai $n = 0$) ympärillä.

- a) $x_2(t) = 2 \cos(2\pi t - \pi/2)$
b) $x_3[n] = \sin(0.1\pi n)$
c) $x_4[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + 2\delta[n+1]$



- d) $x_5[n] = \delta[-1] + \delta[0] + 2\delta[1]$
 e) $x_6[n] = u[n] - u[n-4]$
 f) $x_7[n] = x_4[2-n]$



7. Jaksolliselle jatkuvalla signaalilla on olemassa vakio $T > 0$, jolle $x(t) = x(t+T)$ kaikilla t :n arvoilla. Perusjakso T_0 on lyhyin jakso. Sijoituksen $t \leftarrow t+T$ jälkeen yritetään etsiä vakiota T perustuen sinin/kosinin/eksponenttifunktion 2π -jaksollisuuteen.

- a) $x(t)$ on jaksollinen ja perusjakso on $T_0 = 31/4$:

$$x(t) = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}t\right)$$

$$x(t+T) = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}(t+T)\right) = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}t + 2\pi\left(\frac{4}{31}T\right)\right)$$

Huomaa siis, että T tulee valita niin, että alemman lausekkeen vaihehierto on joku 2π -monikerta: $\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t + 4\pi) = \dots$

- b) $x(t)$ on jaksollinen ja perusjakso on $T_0 = 2$:

$$x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$$

$$x(t+T) = e^{j(\pi(t+T) - 1)} = e^{j(\pi t - 1 + \pi T)}$$

- c) $x(t)$ ei ole jaksollinen, koska ei löydetä arvoa T_0 , joka tuottaisi kulmaan 2π -monikerran muutoksen jokaisella $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{8}t^2\right)$$

$$x(t+T) = \cos\left(\frac{\pi}{8}(t+T)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}t^2 + 2\pi\left(\frac{tT}{8} + \frac{T^2}{16}\right)\right)$$

8. Jaksolliselle diskreetille signaalille on olemassa vakio $N \in \mathbb{Z}_+$, jolle $x[n] = x[n+N]$, kaikille $n \in \mathbb{Z}$.

- a) $x[n]$ on jaksollinen perusjaksolla $N_0 = 31$. Huomaa ero edellisen tehtävän a-kohtaan! Katso kuvaa 18:

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}n\right)$$

$$x[n+N] = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}(n+N)\right) = 3 \cos\left(\frac{8\pi}{31}n + 2\pi\left(\frac{4}{31}N\right)\right)$$

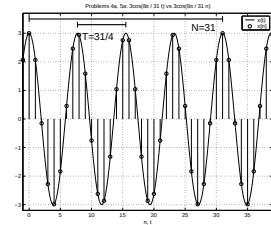
josta $(4/31)N = k$, jossa $N, k \in \mathbb{Z}$, ja edelleen $N = (31/4)k$. Näin ollen pienin jakso N_0 (eli perusjakso) on 31. Huomaa, että se on eri kuin kohdassa 4a.

- b) $x[n]$ ei ole jaksollinen, koska yksikään $16\pi n$ monikerta ei ole kokonaisluku:

$$x[n] = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi\right)$$

$$x[n+N] = \cos\left(\frac{n+N}{8} - \pi\right) = \cos\left(\frac{n}{8} - \pi + 2\pi\frac{N}{16\pi}\right)$$

- c) $x[n]$ on jaksollinen. Lasketaan kunkin kosinin jakso erikseen, jolloin saadaan $N_1 = 8$ ja $N_2 = 12$. Perusjakso on jaksosten pienin yhteinen jaettava eli $24 = 3 \cdot N_1 = 2 \cdot N_2$.



Kuva 18: Vastaus 8: Tehtävien 7a ja 8a ero!

9. Tarkastellaan kolmea järjestelmää S_1 , S_2 ja S_3 , joiden syöte-vasterelaatiot ovat:

$$S_1 : y[n] = x[n] + 2x[n-2]$$

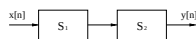
$$S_2 : y[n] = x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2]$$

$$S_3 : y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ parillinen} \\ 0, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

- a) Piirrä ensin lukujono $x[n]$. Ulostulo voidaan laskea vaikkapa yksinkertaisella taulukolla.

n	$x[n]$	$2x[n-2]$	$y_1[n]$	$-3x[n-1]$	$-2x[n-2]$	$y_2[n]$	$y_3[n]$
0	3	0	3	0	0	3	3
1	2	0	2	-9	0	-7	0
2	-2	6	4	-6	-6	-14	2
3	0	4	4	6	-4	2	0
4	0	-4	-4	0	4	4	-2
5	0	0	0	0	0	0	0

- b) S_1 ja S_2 sarjassa. Vaste saadaan sijoittamalla edellisen järjestelmän vaste aina seuraavaan.



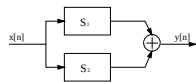
S_1 :n jälkeen $y_1[n] = x[n] + 2x[n-2]$, joka sijoitetaan syötteenä S_2 :en:

$$y_2[n] = y_1[n] - 3y_1[n-1] - 2y_1[n-2]$$

$$= (x[n] + 2x[n-2]) - 3(x[n-1] + 2x[n-3]) - 2(x[n-2] + 2x[n-4])$$

$$= x[n] - 3x[n-1] - 6x[n-2] - 3x[n-3] - 4x[n-4]$$

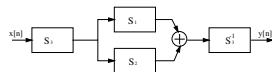
- c) S_1 ja S_2 rinnan. Vaste saadaan laskemalla haarat yhteen.



$$y[n] = (x[n] + 2x[n-2]) + (x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2])$$

$$= 2x[n] - 3x[n-1]$$

- d*) Ensin S_3 , sitten S_1 ja S_2 rinnan, ja lopuksi invertoitu S_3



Käänteiseksi järjestelmäksi $x[n] \rightarrow S_1 \rightarrow S_3^{-1} \rightarrow x[n]$ saadaan $S_3^{-1} : y[n] = x[2n]$. Koska diskreetti järjestelmä on määritelty vain, kun n on kokonaisluku, on $y[n] = 0$ aina kun n ei ole kokonaisluku.

$$y_1[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ parillinen} \\ 0, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

$$y_2[n] = 2y_1[n] - 3y_1[n-1] = 2x\left[\frac{n}{2}\right] - 3x\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$y_3[n] = y_2[2n] = 2x\left[\frac{2n}{2}\right] - 3x\left[\frac{2n-1}{2}\right] = 2x[n] - 3x[n-1]$$

Kokeile vaikkapa syötteellä $x[n] = (1, 2, 0, -2)$.

Lineaarille ja aikainvariantille järjestelmille pätee, että niiden keskinäistä järjestystä voidaan muuttaa lopputuloksen muuttumatta.

Koska järjestys $S_3 \rightarrow S_3^{-1} \rightarrow$ (rinnan (S_1, S_2)) antaa eri tuloksen kuin yllä laskettu järjestys, kaikki kolme (neljä) järjestelmää eivät ole lineaarisia ja aikainvariantteja.

10. Huomaa, että S_3 on lineaarikombinaatio kahdesta ensimmäisestä järjestelmästä

$$S_1 : y_1[n] = 0.5x[n+1]$$

$$S_2 : y_2[n] = -0.5x[-n-1]$$

$$S_3 : y_3[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

- a) Järjestelmä on **muistiton** (Oppenheim s.44), kun sen vaste riippuu vain sen hetkisestä syötteestä, esimerkiksi $y[n] = (x[n])^2 + 2x[n]$. Järjestelmässä ei siis tarvita "muistirekistereitä" välituloksia tai sisääntulon puskuria varten.

Järjestelmää S_2 tarkastelemalla havaitaan vasteen muodostuvan termin $x[-n-1]$ avulla, joten S_2 on muistillinen. Myös muut ovat yhtäläillä muistillisia.

- b) Järjestelmä on **lineaarinen** (s. 53), kun se on additiivinen ja skaalautuva eli

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \rightarrow \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

Lineaarisuuden osoittaminen voidaan tulkitä kuvan 19 mukaan. Olkoon käytössä kaksi mielivaltaista syötettä $x_1[n]$ ja $x_2[n]$. Tutkitaan, tuottaako näiden vasteiden lineaarikombinaatio saman tuloksen kuin syötteiden lineaarikombinaation vaste.

Merkitään syötteiden $x_1[n]$ ja $x_2[n]$ vasteita $y_1[n]$ ja $y_2[n]$:lla:

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 0.5(x_1[n+1])$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 0.5(x_2[n+1])$$

Näiden vasteiden lineaarikombinaatio on kuvan 19 vasemman puoleisen kaavion ulostulo $y_3^*[n]$:

$$y_3^*[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

$$= \alpha 0.5(x_1[n+1]) + \beta 0.5(x_2[n+1])$$

Tutkitaan sitten kuvan 19 oikeanpuoleista kaaviota eli nyt syötteenä järjestelmään on alkuperäisten syötteiden lineaarikombinaatio $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$:

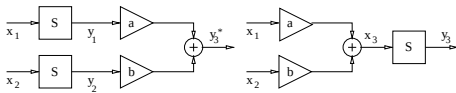
$$y_3[n] = 0.5(x_3[n+1])$$

$$= 0.5(\alpha x_1[n+1] + \beta x_2[n+1])$$

$$= 0.5\alpha(x_1[n+1]) + 0.5\beta(x_2[n+1])$$

Koska $y_3[n] = y_3^*[n]$, niin järjestelmä S_1 on siis lineaarinen. Lineaarissa järjestelmässä voidaan hyödyntää superpositiota esimerkiksi siihen, että sisääntuloa jaetaan pienempiin osiin, suodatetaan (läpi järjestelmän) erikseen, ja kootaan tulos lopuksi yhteen.

Voidaan myös laskea vastaavasti, että S_2 on myös lineaarinen, samoin kuin niiden lineaarikombinaatio S_3 .



Kuva 19: Lineariselle järjestelmälle S pätee $y_3 = y_3^*$. Tässä * on vain eri ulostulot erottava symboli, ei kompleksikonjugaatti tai mikään muu funktio.

- c) Järjestelmä on **aikainvariantti** (s.50), kun järjestelmän käyttäytyminen ei muutu ajan mukana. Aikainvarianttisuuden osoittaminen voidaan tulkita kuvan 20 mukaan. Tutkitaan tilannetta, jossa syötettä viivästetään ja sitten syötetään järjestelmään (yläkuva) ja tilannetta, jossa vastetta viivästetään (alakuva). Jos ulostulot ovat samoja, järjestelmä on aikainvariantti.

Tunnetaan järjestelmän S_2 vaste mielivaltaiselle sekvenssille $x_1[n]$

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = -0.5x_1[-n-1]$$

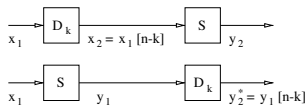
Viivästetään tätä vastetta k yksikköä:

$$y_2^*[n] = y_1[n-k] = -0.5x_1[-(n-k)-1] = -0.5x_1[-n-1+k]$$

Tutkitaan toisaalta viivästettyä syötettä $x_2[n] = x_1[n-k]$:

$$y_2[n] = -0.5x_2[-n-1] = -0.5x_1[-(n-k)-1] = -0.5x_1[-n-1+k]$$

Jos järjestelmä on aikainvariantti, on oltava $y_2[n] = y_2^*[n]$.



Kuva 20: Aikainvariantille järjestelmälle S pätee $y_2 = y_2^*$. Ylempässä kuvassa "siirretään" x:ä, alemmassa y:ä.

Koska $y_2[n] \neq y_1[n-k]$, ei järjestelmä S_2 ole aikainvariantti. Sen sijaan järjestelmä S_1 on aikainvariantti! Osoita!

- d) Järjestelmä on **stabiili** (s. 48), kun järjestelmä antaa rajoitetun vasteen aina kun syöte on rajoitettu (BIBO = bounded input, bounded output). Oletetaan siis, että järjestelmän S_3 syötteelle tiedetään

$$\max |x[n]| \leq B \forall n,$$

jolloin saadaan (kohdassa S_3 kolmioepäytälöä $|a-b| \leq |a| + |b|$ hyväksikäyttäen)

$$|y[n]| = \left| \frac{x[n+1] - x[-n-1]}{2} \right| \leq \frac{|x[n+1]| + |x[-n-1]|}{2} \leq \frac{B+B}{2} = B.$$

Eli järjestelmä S_3 on stabiili, kuten myös sen osatkin.

- e) Järjestelmä on **kausallinen** (s. 46), kun järjestelmän vaste $y(t)$ riippuu vain syöteestä $x(t)$ ajanhetkenä t sekä muistisystemissä. Kausallinen järjestelmä on realisoitavissa (sisältää viivästyskykyä, ei aikaistuksia), se ei siis käytä laskennassa tulevaisuuden arvoja.

Järjestelmän S_1 vaste riippuu kuitenkin termistä $x[n+1]$, eli S_1 ei ole kausallinen. Järjestelmän S_2 kausaalisuutta pitää tarkastella myös negatiivisilla n :n arvoilla, jolloin huomataan, ettei sekään ole kausallinen.

$$\begin{aligned} y_1[5] &= 0.5x_1[6] \\ y_2[5] &= -0.5x_2[-6] \\ y_2[-5] &= 0.5x_2[4] \end{aligned}$$

11. *LTI vaatii sekä lineaarisuuden että aikainvarianttisuuden.

- Ei ole lineaarinen (vakion lisääminen). On kausallinen. Ei ole LTI.
- Ei stabiili (negatiiviset arvot!). Ei kausallinen. Ei ole LTI.
- Ei ole lineaarinen (signaalin neliö). On aikainvariantti. Ei ole LTI.
- Ei ole aikainvariantti (ei vakioeroitusta) eikä stabiilikkaan. Ei ole LTI.

12. Diskreetti-aikainen kausallinen² LTI-järjestelmä voidaan esittää lineaarisena vakioerotimisena differenssiryhmänä

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

jossa on siis vain vakioilla skaalattujen (a_k , b_k) ja viivästettyjen ($[n-k]$) sekvenssien summia. Jos mukana on viivästettyjä y -termejä, tarkoittaa se yleensä takaisinkytkettyä, rekursiivista järjestelmää (IIR). Toisessa tapauksessa suodin on FIR.

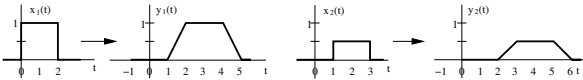
Huomaa LTI-järjestelmälle "sallitut rakennuspalikat": signaalin haarautuminen (molempiin haaroihin sama signaali), signaalien yhteenlasku, signaalin kertominen vakioilla (kolmio näissä kuvissa) ja viiveyksiköt (joko D tai z^{-1}). Halutessaan voi siis kirjoittaa kuvajat i-v auki sopivaksi $y[n]$ ja $x[n]$ esitykseksi, kohta iv on helpoin: $y[n] = 0.5x[n] - \cos(\pi/4)$.

- LTI ovat i, ii, iii. Kuvassa iv kerroin 1 unohtunut alemmasta haarasta, jolloin tulee vakiotermi $-\cos(\pi/4)$, eikä järjestelmä ole LTI. Miksi? Kuvassa v operaatio on signaalien kertolasku, eikä järjestelmä ole LTI. Miksi?
- Takaisinkytkettyjä (IIR) ovat i, ii, iii. Niiden impulssivaste on äärettömän pitkä. Tehtävässä 18 on esimerkki järjestelmästä, jota ei ole takaisinkytketty ja jonka impulssivasteen pituus on siten äärellinen (Finite length Impulse Response). Tehtävän 19 järjestelmä on taasen takaisinkytketty IIR (Infinite length Impulse Response).

13. Käyttämällä hyväksi lineaaristen aikainvarianttien järjestelmien ominaisuuksia (additiivisuus, skaalaus, siirto ajassa) voidaan havaita, että signaali $x_2(t)$ voidaan muodostaa skaalamalla ja viivästämällä $x_1(t)$:ä $x_2(t) = 0.5 x_1(t-1)$. Tällöin myös vaste $y_2(t)$ saadaan skaalamalla ja viivästämällä eli $y_2(t) = 0.5 y_1(t-1)$. Katso kuva 21.

Vastaavasti syöte x_1 voidaan ajatella koostuvan esimerkiksi kahdesta yhden levyisestä suorakulmiesta, joista toista on vain viivästetty yhden verran enemmän.

²ei-kausalisessa tapauksessa tulisi indeksin k negatiivisia arvoja mukaan



Kuva 21: Vastaus 13: LTI:n ominaisuuksien avulla voidaan esittää y_2

14. Lasketaan diskreetti-aikainen, äärellisen pitkä (tässä tapauksessa lyhyt) konvoluutiosumma käyttäen määritelmää

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- a) Lasketaan tämä tehtävä skaalattujen ja siirrettyjen sekvenssien summana (s. 79-81, Example 2.1):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[n-k] = \overbrace{h[0]}^{=1} x[n-0] + \overbrace{h[1]}^{=-1} x[n-1] \\ &= x[n] - x[n-1] = \{1, (3-1), (2-3), -2\} \\ &= \{1, 2, -1, -2\} \end{aligned}$$

Summauksen rajat 0 ja 1 tulivat siis siitä, että $h[n]$ on nolla kaikilla muilla indekseillä.

- b) Lasketaan tämä tehtävä liu'uttaen yksi ulostulon piste kerrallaan (s. 81-82, Example 2.2):

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

Nyt lasketaan kiini siis piste kerrallaan, mikä graafisesti vastaa sekvenssien liu'uttamista toistensa yli, kun toinen sekvensseistä on käännetty. Liu'utus (x-akseli) tapahtuu siis

indeksin k suhteen.

$$\begin{aligned} y[0] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[0-k] = h[0]x[0] + h[1]x[-1] \\ &= (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 0) = 0 \\ y[1] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[1-k] = h[0]x[1] + h[1]x[0] \\ &= (1 \cdot 2) + (-1 \cdot 0) = 2 \\ y[2] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[2-k] = h[0]x[2] + h[1]x[1] \\ &= (1 \cdot 3) + (-1 \cdot 2) = 1 \\ y[3] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[3-k] = h[0]x[3] + h[1]x[2] \\ &= (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 3) = -3 \\ y[4] &= \sum_{k=0}^1 h[k]x[4-k] = h[0]x[4] + h[1]x[3] \\ &= (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

Näin ollen $y[n] = 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - 3\delta[n-3]$. Huomaa, että tässä b-tehtävässä $x[n]$ alkoi "viivästettynä", joten myös ulostulo on viivästetty.

Ulostulosekvenssin pituus on kahden konvoloitavan sekvenssin summa miinus 1. Katso seuraava tehtävä.

15. Lasketaan konvoluutio kun

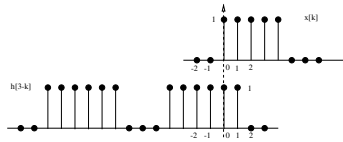
- a) $x[n]$ ja $h[n]$ ovat kuvan 22 kaltaiset. Tehtävässä konvoluutio voidaan ajatella kuvassa 23 esitetyllä tavalla, jolloin käytetään edellisen tehtävän b-kohdan liu'utusta. Impulssivasteessa $h[n-k]$ esiintyvä termi $-k$ aiheuttaa ensimmäinkin, että sekvenssiä h tarkastellaan "kiepauttamalla" se ympäri, kun taas termi n aiheuttaa siirroksen, joka esimerkikikuvassa 23 on $n=3$.

Konvoluution tuloksen kohdassa $n=3$ saadaksesen on vain kerrottava ne $x[k]$:n ja $h[3-k]$:n arvot keskenään, jotka poikkeavat nolasta samalla kohdalla ja summattava nämä yhteen: $y[3] = \sum_{k=0}^3 h[k]x[3-k]$. Tämä tehdään kaikille n arvoille. Lopputuloksena saadaan syötteelle $x[n]$ kuvassa 24 esitetyn kaltainen vaste.

Huomaa, että sekvenssien pituudet ovat $\text{Length}\{x[n]\} = 5$, $\text{Length}\{h[n]\} = 15$ (osa arvoista on nollia) ja $\text{Length}\{y[n]\} = 15 + 5 - 1 = 19$. Huomaa myös, että ulostulon ensimmäinen nollasta eroava kohta on kahdesta konvoloitavasta sekvenssistä "jälkimmäisen" aloituskohta.



Kuva 22: Tehtävä 15: Järjestelmän syöte $x[n]$ ja impulssivaste $h[n]$.



Kuva 23: Konvoluution tulos, kun $n = 3$. Syöte ja impulssivaste menevät päällekkäin kohdissa $k = 0$ ja $k = 1$ tuottaen arvon 2.



Kuva 24: Vastaus 15: Konvoluution tulos $y[n]$, korostettuna kohta $n = 3$ eli $y[3] = \sum_{k=0}^3 x[k]h[3-k] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

$$\text{b*) } x[n] = \alpha^n u[n] \\ h[n] = \beta^n u[n]$$

Muistetaan, että geometrisen sarjan summa, jossa suhdeluku on $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Konvoluutiolausekkeeksi saadaan

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \beta^{n-k} u[n-k].$$

Tarkastelemalla askelfunktiota havaitaan, että $u[k] = 1$, kun $k \geq 0$, ja $u[n-k] = 1$, kun $k \leq n$. Summalauseke poikee siis nollasta kun $x \in [0, n]$, eli

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{-k}.$$

Kyseessä on nähtävästikin geometrisen sarjan summa, jossa suhdeluku $q = \frac{\alpha}{\beta}$. Kannattaa muistaa, että kun $n \rightarrow \infty$ on oltava $|q| < 1$, jotta sarja olisi rajoitettu. Sarjalle

$$y[n] = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.$$

16. LTI-systeemien assosiatiivisuudesta seuraa, että

$$h_2[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (h_2[n] * h_2[n]) * h_1[n].$$

Kun systeemin $h_2[n]$ impulssivaste ja koko systeemin impulssivaste $h[n]$ ovat tehtävässä annettuja, voidaan päätellä impulssivaste $h_1[n]$. Prosessia kutsutaan *dekonvoluutioksi*.

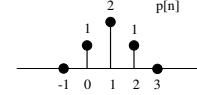
Lasketaan ensin konvoluutio $h_2[n] * h_2[n]$ ja merkitään tätä vaikka $p[n]$:llä:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]h_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-2])(u[n-k] - u[n-k-2])$$

konvoluution termi $u[k] - u[k-2]$, jossa kaksi askelfunktiota on vähennetty toisistaan, poikkeaa nollasta k:n arvoilla 0 ja 1, joten konvoluutioksi saadaan

$$p[n] = \sum_{k=0}^1 u[n-k] - u[n-k-2] = (u[n-0] - u[n-2]) + (u[n-1] - u[n-3])$$

Tämän perusteella saadaan vasteeksi $p[0] = 1$, $p[1] = 2$ ja $p[2] = 1$, muuten konvoluution tulos on nolla. (Ylläoleva voidaan toki laskea $(\delta[n] + \delta[n-1])$ eli $\{1, 1\}$ konvoluutiona itsensä kanssa.) Systeemin $h_2[n] * h_2[n]$ impulssivasteeksi saadaan siis :



a) Impulssivaste $h_1[n]$ saadaan *dekonvoluutiolla*. Impulssivasteen $h_1[n]$ nollasta poikkeava pituus on $N_{h1} = N_h + 1 - N_p$ eli tässä tapauksessa $N_{h1} = 7 + 1 - 3 = 5$. Tehtävän voi miettimällä konvoluution kautta parillakin tavalla, joissa etsitään h_1 :lle sopivaa muotoa:

$$h[n] = \sum_{k=0}^2 p[k]h_1[n-k]$$

joka voidaan avata, koska $p[n]$ tunnetaan:

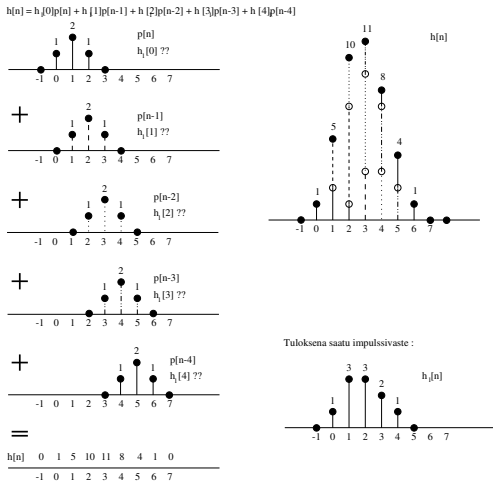
$$1 \cdot h_1[0] + 2 \cdot h_1[n-1] + 1 \cdot h_1[n-2] = h[n],$$

Toinen vaihtoehtoinen tapa on ajatella haettavan sellaisia skaalauskerroimia $h_1[n]$, joilla saa impulssivasteen $h[n]$ esitettyä $p[n]$:n superpositiiona, eli

$$h[n] = \sum_{k=0}^4 h_1[k]p[n-k] \\ = h_1[0]p[n] + h_1[1]p[n-1] + h_1[2]p[n-2] + h_1[3]p[n-3] + h_1[4]p[n-4]$$

Seuraavan sivun kuvassa on esitetty, miten $h_1[n]$ etsitään ja saadaan lopulta siis muotoon

$$h[n] = h_1[0]p[n] + h_1[1]p[n-1] + h_1[2]p[n-2] + h_1[3]p[n-3] + h_1[4]p[n-4] \\ = p[n] + 3p[n-1] + 3p[n-2] + 2p[n-3] + p[n-4] \\ \Rightarrow h_1[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]$$



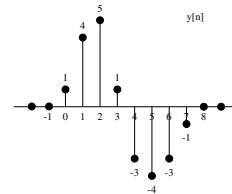
Kuva 25: Tehtävä 16a: Dekonvoluutio

b) Voidaan laskea normaalin konvoluutiona (jo ennen a-kohdan laskemistakin). Kysyttävä vaste on kahden impulssivasteen superpositio, jossa siis vähennetään yhdellä askelolla positiivisen suuntaan siirretty impulssivaste alkuperäisestä impulssivasteesta eli $h[n] - h[n-1]$, joka on esitetty kuvassa 26.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] = h[n] - h[n-1]$$

17. Tehtävän ideana on vain huomata, että LTI-järjestelmissä tarvittaessa voimme jakaa joko signaalin tai impulssivasteen osiin. Lasketaan ensin "raa'asti" eli käytetään konvoluution määritelmää.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k] \\ = \sum_k 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k+3] \\ = \sum_{k=-\infty}^{n+3} 3^{-|k|} (1/4)^{n-k}$$



Kuva 26: Tehtävä 16b: Vaste syötteeseen $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

Sitten oletetaan tunnetuksi konvoluution osittelulaki:

$$y[n] = 3^n u[-n-1] * (1/4)^n u[n+3] + (1/3)^n u[n] * (1/4)^n u[n+3] \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3^k u[-k-1] \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n+3-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k u[k] \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n+3-k] \\ = \sum_{k=-\infty}^{\min(-1, n+3)} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+3} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$$

Jos nyt $n+3 > -1$, saadaan

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+3} 3^{-|k|} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\ = \sum_{k=-\infty}^{n+3} 3^{-|k|} (1/4)^{n-k}$$

Jos taas $n+3 < -1$ on jälkimmäinen summa nolla ja ensimmäisestä summasta tulee

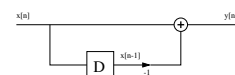
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+3} 3^{-|k|} (1/4)^{n-k}$$

eli saadaan sama tulos kuin ilman osittelulain käyttöä.

18. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälönä

$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

a) Systeemin lohkokaavio (D on viive):



Nähdään siis, että laskenta "etenee" vasemmalta oikealle, eikä takaisinkytkentää ole. Tästä voidaan jo ennakoita, että impulssivaste on äärellisen pitkä (FIR).

- b) Impulssivaste $h[n]$ on systeemin vaste yksikköimpulssiin $\delta[n]$. Laitetaan siis syötteeksi $\delta[n]$ eli ykkönen ajanhetkellä $n = 0$ ja saadaan

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

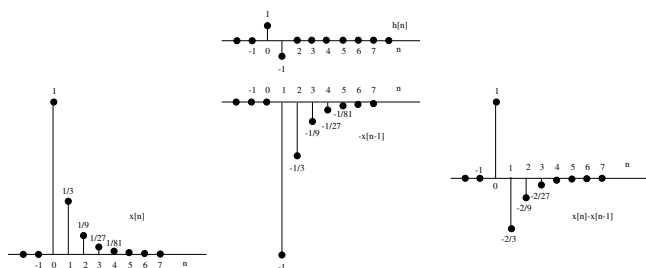
n	x[n]	-x[n-1]	y[n] = x[n] - x[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	-1	-1
2	0	0	0
3	0	0	0

FIR-tapauksissa (differenssiyhtälöissä ei ole viivastettyjä y -termejä mukana) suotimen impulssivaste saadaan siis suoraan differenssiyhtälöstä vaihtamalla y h :ksi ja x δ :ksi.

- c) Systeemin vaste syötteellä $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$ on laskettu alle ja piirretty kuvaan 27.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] - x[n-1] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left[\frac{1}{3} u[n] - u[n-1]\right] \end{aligned}$$

n	x[n]	-x[n-1]	y[n] = x[n] - x[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1/3	-1	-2/3
2	1/9	-1/3	-2/9
3	1/27	-1/9	-2/27
4	1/81	-1/81	-2/81
..	..	..	..

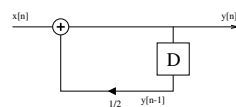


Kuva 27: Vastaus 18: Vasteen laskeminen. Vasemmalla $x[n]$, keskellä ylhäällä impulssivaste $h[n]$ ja alhaalla $-x[n-1]$ ja oikealla vaste $y[n] = \sum h[k]x[n-k]$.

19. Tarkastellaan systeemiä, joka on määritelty differenssiyhtälönä

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] &= x[n] \\ y[n] &= \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \end{aligned}$$

- a) Systeemin lohkokkaavio (D on viive):



Nyt nähdään, että kaaviossa on takaisinkytkentä. Tämä tarkoittaa siis toisin sanoen rekursiivista laskentaa eli että ulostulon laskemiseksi tarvitaan joitakin entisiä ulostulon arvoja. Impulssivasteen pituudeksi tulee ääretön (IIR); käytännön asioihin ei tässä puututa (bittimäärä rajoittaa esitystarkkuuden).

Esimerkiksi Fibonaccin lukujonon voi hyvin helposti esittää rekursiivisessa muodossa kahden edellisen luvun avulla, mutta se on mahdollista myös yhtä lailla esittää ei-rekursiivisena (FIR).

- b) Impulssivaste $h[n]$ saadaan syöttämällä systeemiin yksikköimpulssi $\delta[n]$:

n	x[n]	1/2 y[n-1]	y[n] = x[n] + 1/2 y[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1/2	1/2
2	0	1/4	1/4
3	0	1/8	1/8
4	0	1/16	1/16
..	..	..	..

Nähdään, että $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$.

- c*) Differenssiyhtälöiden ratkaiseminen tapahtuu kahdessa vaiheessa. Ensinnäkin ratkaistaan homogeeninen yhtälö, jossa häiriötermi $x[n]$ on asetettu nolaksi. Tyypillinen yrite on $y[n] = z^n$. Erityisen yhtälön ratkaisu taas saavutetaan yrittäällä, joka on samaa muotoa häiriötermin kanssa. Koko yhtälön ratkaisu on näiden kahden ratkaisun lineaarinen yhdistelmä

$$y[n] = Ay_p[n] + By_h[n],$$

jossa A saadaan mahdollisesta alkuehdosta ja B erityisen yhtälön ratkaisusta. Toimitaan edellä kerrottuun tapaan tehtävää ratkaistessa.

H.Y.

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] &= 0, \text{ sij. yrite } y = z^n \\ \Rightarrow z^n - \frac{1}{2}z^{n-1} &= 0 \quad | \cdot z^{-n+1} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisuksi saadaan siis

$$y_h[n] = A \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

E.Y. Tutkitaan tilanne, jossa $n > 0$.

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] &= x[n], \text{ sij. yrite } y = Bx[n] = B \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \Rightarrow B \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2}B \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad | \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} \\ \Leftrightarrow B - \frac{3}{2}B &= 1 \Leftrightarrow B = -2. \end{aligned}$$

Täydellisen yhtälön ratkaisu on siis muotoa

$$y[n] = A \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Kyse on kausaalisesta systeemistä, sillä mitään arvoja ei pyritä ennustamaan tulevaisuuden perusteella. Tästä syystä ovat vasteen $y[n]$ arvot $= 0$ kun $n < 0$, sillä tuolloin syöte $x[n] = 0$. Tämän alkuehdon perusteella saadaan

$$y[0] - \frac{1}{2}y[-1] = x[0],$$

jossa $y[-1] = 0$. Sijoitetaan tähän täydellisen yhtälön ratkaisu :

$$\begin{aligned} A \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^0 \\ A &= 3, \end{aligned}$$

joten täydelliseksi ratkaisuksi saadaan :

$$y[n] = \begin{cases} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}.$$

Tehtävän voi ratkaista myös (1) z-muuntamalla x :n ja y :n, hakemalla osittais-murtokehitelmän avulla kertoimet ja muuntamalla takaisin aikatasoon tai (2) konvoluutiolla $x[n] * h[n]$. HUOM! Numeeriset ratkaisut ovat aina vain numeerisia, mutta niillä pääsee alkuun:

n	x[n]	1/2 y[n-1]	y[n] = x[n] + 1/2 y[n-1]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	1/3	1/2	5/6
2	1/9	5/12	19/36
3	1/27	19/72	65/216
..	..	..	..

20. LTI-järjestelmä muuttaa vain syötteen amplitudia - ei taajuutta, katso kappale 3.2, s. 182:

$$e^{j\omega n} \rightarrow H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

Täten S_1 ei voi olla LTI, mutta S_2 voi olla.

21. Synteesiyhtälö on:

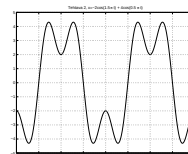
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

Nyt kertoimet a_k ovat:



Kun perusjakson pituus on $T = 4$ niin $f_0 = 1/4$ ja jolloin $\omega_0 = 2\pi f_0 = 0.5\pi$. Saadaan kuvan 28 mukainen signaali käyttämällä kertoimia $a_{-1} = a_1 = 2$, $a_{-3} = a_3 = -1$ ja $a_k = 0$ muilla k :n arvoilla:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= \dots + a_{-2} e^{j(-2)\omega_0 t} + a_{-1} e^{j(-1)\omega_0 t} + a_0 e^{j(0)\omega_0 t} + a_1 e^{j(1)\omega_0 t} + \dots \\ &= -1e^{j(-3)(0.5\pi)t} + 2e^{j(-1)(0.5\pi)t} + 2e^{j(1)(0.5\pi)t} - 1e^{j(3)(0.5\pi)t} \\ &= -(e^{-j(1.5\pi)t} + e^{j(1.5\pi)t}) + 2(e^{j(-0.5\pi)t} + e^{j(0.5\pi)t}) \\ &= -2 \cos(1.5\pi t) + 4 \cos(0.5\pi t) \end{aligned}$$



Kuva 28: Vastaus 21: $x(t)$ koostuu kahdesta kosinista (eli neljästä Fourier-kertoimesta).

22. Vastaukset voidaan nähdä suoraan sarjaesityksestä (synteesiyhtälöstä)!

- a) $x(t) = \dots + a_{-1}e^{j(-1)\omega_0 t} + \dots = e^{-j\omega_0 t}$, josta $a_{-1} = 1$ ja kaikille muille k :n arvoille $a_k = 0$. Huomaa, että signaali on kompleksinen, jolloin Fourier-kertoimet eivät ole symmetrisesti y -akselin ympäri. Voidaan laskea myös analyysiyhtälön

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

avulla. Tällöin esimerkiksi kerroin a_{-1}

$$a_{-1} = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j(-1)\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T e^{-j\omega_0 t} e^{j\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T 1 dt = 1$$

Muilla k :n arvoilla integrandiin tulee eksponenttitermin argumenttiin $2\pi n$ moniker-tä, jolloin integraalista yli yhden jaksonpituuden tulee eksponentti.

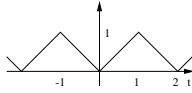
- b) Nyt pitää ensin selvittää peruskulmataajuus. Ensimmäisen summattavan jakso on $T_1 = 1$ ja toisen $T_2 = 2/3$. Näin ollen summasignaalin perusjakso on $T_0 = 2$ ($T_0 = 2T_1 = 3T_2$) ja $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi/2 = \pi$. Käyttäen Eulerin kaavaa laske-taan eksponenttikesitys kosineille käyttäen peruskulmataajuutta $\omega_0 = \pi$:
- $$\cos(2\pi t) = \cos((2)(\pi)t) = 0.5 (e^{j(2)(\pi)t} + e^{j(-2)(\pi)t})$$
- ja $\cos(3\pi t)$:llä samoin,
- $$\cos(3\pi t) = \cos((3)(\pi)t) = 0.5 (e^{j(3)(\pi)t} + e^{j(-3)(\pi)t})$$
- joiden avulla

$$x(t) = a_{-3}e^{j(-3)(\pi)t} + a_{-2}e^{j(-2)(\pi)t} + a_2e^{j(2)(\pi)t} + a_3e^{j(3)(\pi)t}$$

josta kertoimet

$$a_{-3} = a_3 = 1/2, \quad a_{-2} = a_2 = 1/2, \quad \text{muulloin } a_k = 0.$$

23. Jaksollinen signaali $x(t)$



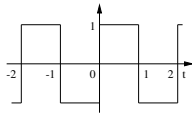
Kuva 29: Alkuperäinen signaali $x(t)$, kertoimet a_k

- a) a_0 antaa signaalin keskiarvon, DC-komponentin.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = 1/2 \int_0^2 x(t) dt = \frac{1}{2}$$

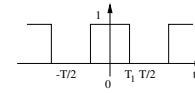
- b) Signaalin derivaatta on

$$dx(t)/dt = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



Kuva 30: Signaalin $x(t)$ derivaatta

Kirjassa on johdettu kertoimet suorakaidepulsseille (Example 3.5) ja vastaavalla ta-valla siirretylle ja skaalatulle (Example 3.6) suorakaidepulsseille. Sivulla 194 (kaava



Kuva 31: Signaali, jonka Fourier-kertoimet d_k tunnetaan

- 3.44), T_1 on kohta, jolloin askel putoaa nolnaan ja T on jaksonpituus, katso kuva alla. Tällöin kertoimet:

$$d_k = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad k \neq 0$$

Taulukosta 3.1 nähdään, että kun signaalia, jonka Fourier-kertoimet ovat a_k , viiväs-tetään aikatasossa t_0 , niin siirretyn signaalin Fourier-kertoimet ovat $a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$.

Tässä tehtävässä (derivaatan) signaalin keskiarvo on nolla eli $b_0 = 0$. Signaalin ampli-tudi on kaksi ja $T_1 = 0.5$, $T = 2$, josta $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Jaksonpituuden skaalaaminen ei vaikuta kertoimiin, mikäli Fourier-sarjan perustaaajuus skaalataan samalla tekijällä. Signaalia on viivästetty $t_0 = 0.5$.

Näin saadaan (d_k on kaavasta 3.44 saatu, yllä näkyvä tulos (kaavassa 3.44 merkitty a_k). c_k on kahdella kerrottu suorakaidepulsilla, b_k tämä siirrettynä, jolloin saadaan tehtävässä kysytty (derivaatan) funktio),

$$\begin{aligned} c_k &= 2 d_k = 2 \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} \\ &= 2 \frac{2 \sin(k\pi/2)}{2k\pi} \\ &= 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= c_k e^{-jk\omega_0 t_0} \\ &= c_k e^{-jk\pi/2} \\ &= 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \end{aligned}$$

- c) Derivointiominaisuus Fourier-kertoimille tarkoittaa, että jos signaalin $x(t)$ Fourier-kertoimet ovat a_k , niin derivaatan $dx(t)/dt$ Fourier-kertoimet ovat $jk\omega_0 a_k$. Olkoon nyt tässä tehtävässä alkuperäisen signaalin kertoimet a_k , jolloin $a_k jk\omega_0$ antaa kohdassa b ratkaistut b_k :t. Koska $T = 2$, niin $\omega_0 = \pi$.

$$\begin{aligned} a_k jk\omega_0 &= 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} = b_k \\ a_k &= \frac{1}{jk\omega_0} 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \\ &= \frac{-j}{k\pi} 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2} \\ &= (-j) 2 \frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} e^{-jk\pi/2} \\ &= (-j) 2 \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{2j} (e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}) e^{-jk\pi/2} \\ &= -\frac{1}{(k\pi)^2} (1 - e^{-jk\pi}) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{(k\pi)^2} & k \text{ pariton} \\ 0 & k \text{ parillinen} \end{cases} \end{aligned}$$

Kerätään tulokset c-kohdasta, eli kertoimet alkuperäiselle signaalille:

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2}{(k\pi)^2}, & k \text{ pariton} \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \wedge k \text{ parillinen} \end{cases}$$

Kertoimet olisi voitu toki ratkaista suoraan laskemalla.

24. *Koska $x(t)$:n perusjakso on $T = 6$, niin kirjoitetaan Fourier-sarja

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\pi/3}$$

Signaalin reaaliarvoisuudesta seuraa, että $|a_k| = |a_{-k}|$. Koska $a_k = 0$, kun $k = 0, 3, 4, 5, \dots$, niin silloin $a_k \neq 0$, kun $k = -2, -1, 1, 2$. Silloin

$$x(t) = a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3} + a_1 e^{j\pi/3} + a_1^* e^{-j\pi/3}$$

Koska $a_1 > 0$ ja reaalinen, niin

$$x(t) = a_1 2 \cos(t\pi/3) + a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3}$$

Yhtälöstä $x(t) = -x(t-3)$ seuraa, että

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 2 \cos(t\pi/3) + a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3} \\ &= -a_1 2 \cos((t-3)\pi/3) - a_2 e^{j(t-3)\pi/3} - a_2^* e^{-j(t-3)\pi/3} \\ &= -a_1 2 \cos((t-3)\pi/3) - e^{-j2\pi} (a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3}) \\ &= -a_1 2 \cos(t\pi/3 - \pi) - a_2 e^{j2\pi/3} - a_2^* e^{-j2\pi/3} \\ &= a_1 2 \cos(t\pi/3) - a_2 e^{j2\pi/3} - a_2^* e^{-j2\pi/3} \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $a_2 e^{j2\pi/3} + a_2^* e^{-j2\pi/3} = 0$ eli $a_2 = 0$. Saadaan $x(t) = a_1 2 \cos(t\pi/3) = A \cos(Bt+C)$. Vakiot ovat $A = a_1 2$, $B = \pi/3$, $C = 0$. Ominaisuus v) kertoo, että $\sum |a_k|^2 = 1/2$ eli $2a_1^2 = 1/2$. Tästä saadaan $a_1 = 1/2$ eli $A = 1$. Lopulta on osoitettu, että $x(t) = \cos(t\pi/3)$.

25. Synteesiyhtälö on

$$x[n] = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 n}$$

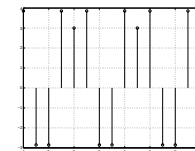
Nyt kertoimet a_k ovat:



Huomaa erityisesti, että **diskreetin signaalin Fourier-kertoimet ovat jaksollisia**, toisin sanoen esimerkiksi $a_0 = a_5 = a_{-5} = a_{10} = a_{-10} = \dots$. Merkitään näissä vastauksissa yllä mainittuja kertoimia merkinällä $k = \langle 0 \rangle$ eli toisin sanoen $k = 5m$, jossa $m \in \mathbb{Z}$ ja 5 tulee jaksonpituudesta.

Kun perusjakson pituus on $N = 5$, jolloin $\omega_0 = 2\pi/N = 0.4\pi$. Saadaan:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-2}^2 a_k e^{jk\omega_0 n} \\ &= -1e^{j(-2)(0.4\pi)n} + 2e^{j(-1)(0.4\pi)n} + 1e^0 + 2e^{j(1)(0.4\pi)n} - 1e^{j(2)(0.4\pi)n} \\ &= -(e^{-j(0.8\pi)n} + e^{j(0.8\pi)n}) + 1 + 2(e^{-j(0.4\pi)n} + e^{j(0.4\pi)n}) \\ &= -2 \cos(0.8\pi n) + 4 \cos(0.4\pi n) + 1 \end{aligned}$$



Kuva 32: Tehtävä 25: $-2 \cos(0.8\pi n) + 4 \cos(0.4\pi n) + 1$

26. Edelleen pyydettiin analyysiyhtälöllä, vaikka käsin laskettaessa lyhyitä muunnoksia päät-tely synteesiyhtälön kautta on ehkä näppärämpää. a-kohta lasketaan sekä synteesi- että analyysiyhtälöä käyttäen.

- a) Peruskulmataajuus $\omega_0 = \pi/3$ ja jakson pituus $N = 6$. Kertoimet voidaan päätellä synteesiyhtälön kehittämistä, ja saadaan

$$x_1[n] = \dots + a_{-1}e^{j(-1)(\pi/3)n} + a_0 + a_1e^{j(1)(\pi/3)n} + \dots$$

josta $a_{-1} = a_1 = 1/2$, ja muut $a_k = 0$, kun $k = \{-2, 0, 2, 3\}$.

Jos halutaan käyttää analyysiyhtälöä, muokataan kosini Eulerin avulla eksponentti-muotoon ja lasketaan:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} x[n] e^{-jk\omega n} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} \left(0.5e^{j(-1)(\pi/3)n} + 0.5e^{j(1)(\pi/3)n} \right) e^{-jk(\pi/3)n} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} \left(0.5e^{j(-1)(\pi/3)n} e^{-jk(\pi/3)n} \right) + \left(0.5e^{j(1)(\pi/3)n} e^{-jk(\pi/3)n} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{n=(0,1,2,3,4,5)} 0.5e^{-j(\pi/3)n(1+k)} + 0.5e^{j(\pi/3)n(1-k)} \\
 &= \begin{cases} 0.5, & \text{kun } k = \pm 1, \pm 6, \dots \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}
 \end{aligned}$$

- b) Ensimmäisen summattavan jaksonpituus on $N_1 = 4$ ja toisella $N_2 = 8$. Tällöin perusjakso $N = 8$ ja peruskulmataajuus $\omega_0 = \pi/4$. Saadaan siis

$$x[n] = \dots + a_{-2}e^{j(-2)(\pi/4)n} + a_{-1}e^{j(-1)(\pi/4)n} + a_0 + a_1e^{j(1)(\pi/4)n} + a_2e^{j(2)(\pi/4)n} + \dots$$

josta $a_{-2} = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2j}$, ja muut $a_k = 0$, kun $k = \{-3, 0, 3, 4\}$.

27. Fourier-muunnos, sinc-funktio. Kirjan esimerkit 4.4 ja 4.5.

- a) Laske Fourier-muunnos signaalille

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 F\{x(t)\} = X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-T_1}^{T_1} 1 e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} \\
 &= \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{-j\omega(-T_1)}) \\
 &= \frac{1}{j\omega} (e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}) \\
 &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1), \omega \neq 0
 \end{aligned}$$

Kun $\omega = 0$ eli halutaan ns. DC-komponentti, voidaan ylläoleva vielä muuttaa muotoon

$$X(j\omega) = \frac{2T_1 \sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

joka lähenee $2T_1$:ä, kun $\omega \rightarrow 0$, koska tiedetään, että $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$, kun $x \rightarrow 0$.

- b) Esitä a-kohdassa saatu F-muunnos sinc-funktion avulla, $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1) &= \frac{2}{\omega} \left(\frac{\sin(\pi \frac{\omega T_1}{\pi})}{(\pi \frac{\omega T_1}{\pi}) \frac{1}{\omega T_1}} \right) \\
 &= \frac{2}{\omega} \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right) (\omega T_1) \right) \\
 &= 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

28. F-muunna seuraavat signaalit ja impulssivaste käyttäen hyväksi taulukkoa (aikasiirto, lineaarisuus, derivointi ajassa) ja aiempia tuloksia (tehtävä 27).

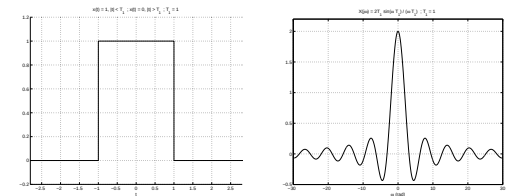
$$\text{a) } x_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kyseessä on tehtävän 27 signaali, jota on viivästetty yhdellä (sekunnilla) ja kerrottu kahdella (piirrä!). Lisäksi $T_1 = 1$. Taulukosta nähdään ajassa siirtäminen: jos $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$, niin $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$.

$$\begin{aligned}
 X_1(j\omega) &= 2 e^{-j\omega 1} X(j\omega) = 2 e^{-j\omega} \left(2 \cdot 1 \text{sinc}\left(\frac{\omega 1}{\pi}\right) \right) \\
 &= 4 e^{-j\omega} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } x_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ 2, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Tässä voidaan käyttää hyväksi lineaarisuutta eli ajatella signaalin $x(t)$ muodostuvan (vaikkapa) kolmen osignaalin summana. Ensimmäinen (X_{2a}) on yhden korkea suorakaide välillä 0..1, toinen (X_{2b}) kolmen korkea välillä 1..2 ja kolmas (X_{2c}) kahden



Kuva 33: Suorakulmafunktion $x(t)$ Fourier-muunnos on sinc-funktio

korkea välillä 2..4. Käytetään edelleen tehtävän 27 tulosta $X(j\omega) = 2T_1 \text{sinc}(\frac{\omega T_1}{\pi})$.

$$\begin{aligned}
 X_2(j\omega) &= X_{2a}(j\omega) + X_{2b}(j\omega) + X_{2c}(j\omega) \\
 &= e^{-j\omega 0.5} \left(\text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right) + 3 e^{-j\omega 1.5} \left(\text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right) + 4 e^{-j\omega 3} \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)$$

Nyt nähdään, että kyseessä on ajassa siirto $t_0 = 2$ ja taulukosta nähdään muunnos-pari $e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$, jossa $a = 1$. Näin **impulssivasteesta** $h(t)$ saadaan **taajuusvaste** $H(j\omega)$

$$H_3(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \frac{1}{a+j\omega} = e^{-2j\omega} \frac{1}{1+j\omega}$$

$$\text{d) } x_4(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Aiemmin tehtävässä 23 kolmioaalto oli jaksollinen (nyt ei-jaksollinen). Nytkin käytetään hyväksi derivointiominaisuutta. Nähdään (piirrä!), että

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

Nämä ovat kaksi suorakaidetta (aikaistettu X_{4a} ja viivästetty sekä negatoitu X_{4b}):

$$\begin{aligned}
 X_{4r}(j\omega) &= e^{-j\omega(-0.5)} (2 \cdot 0.5 \text{sinc}(\frac{0.5\omega}{\pi})) - e^{-j\omega(0.5)} (2 \cdot 0.5 \text{sinc}(\frac{0.5\omega}{\pi})) \\
 &= (\text{sinc}(\frac{0.5\omega}{\pi})) (2j \sin(0.5\omega))
 \end{aligned}$$

Taulukosta nähdään, että $\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$. Nyt siis

$x_4(t) = \frac{dx_4(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X_4(j\omega) = X_{4r}(j\omega)$. $X_{4r}(j\omega)$ tunnetaan, joten saadaan

$$\begin{aligned}
 X_4(j\omega) &= \frac{1}{j\omega} X_{4r}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \left(\text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) (2j \sin(0.5\omega)) \right) \\
 &= \frac{2}{\omega} \text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \sin(0.5\omega) \\
 &= \left(\text{sinc}\left(\frac{0.5\omega}{\pi}\right) \right)^2
 \end{aligned}$$

DC-komponentti saadaan lasketuksi: $|X_4(0)| = 1$, joka on kolmion $x_4(t)$ pinta-ala.

29. Konvoluutio-ominaisuus (s. 314)

$$y(t) = h(t) * x(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Laske impulssivasteiden $h_1(t) = e^{-0.5t}u(t)$ ja $h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$ konvoluutio $h_1(t) * h_2(t)$ käyttämällä F-muunnoksen konvoluutio-ominaisuutta (muunnosten kertolasku, osamur-

tokehittelällä tulo summatermeiksi, käänteismuunnos takaisin aikatasoon).

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{0.5 + j\omega}$$

$$H_2(j\omega) = 2 \cdot \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega) = \left(\frac{1}{0.5 + j\omega} \right) \left(\frac{2}{1 + j\omega} \right)$$

Halutaan $H(j\omega)$ kahden ensimmäisen asteen rationaalipolynomin summaksi. Käytetään **osamurtokehittelää** hajottamaan kertolasku summaksi. (Kertaa osamurtokehittelmä (partial fraction expansion) matematiikasta tai Appendix A, jos ei ole tuttu!)

$$\frac{A}{0.5 + j\omega} + \frac{B}{1 + j\omega} = \frac{A + Aj\omega + 0.5B + Bj\omega}{(0.5 + j\omega)(1 + j\omega)}$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + 0.5B = 2 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

Näistä saadaan $A = 4$, $B = -4$, joten taajuusvaste $H(j\omega)$ ja sen käänteismuunnos (taulukosta!) impulssivaste $h(t)$ ovat

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{4}{0.5 + j\omega} - \frac{4}{1 + j\omega} \\
 h(t) &= 4e^{-0.5t}u(t) - 4e^{-t}u(t)
 \end{aligned}$$

Tätä ominaisuutta $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ **käytetään runsaasti!**

30. Käänteinen F-muunnos

- a) Laske käänteinen Fourier-muunnos

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Laske vastaavasti kuin tehtävässä 27. Tulos: $x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$

- b) Esitä a-kohdassa saatu signaali sinc-funktion avulla, $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta}$

Laske vastaavasti kuin tehtävässä 27. Tulos: $\frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$

- c) Duaaliominaisuus tarkoittaa, että suorakulmafunktio muuttuu muunnoksessa sinc-funktioksi ja päinvastoin. Tätä on selvitetty kirjassa sivulla 309-310 ja luentokalvoissa.

31. *Lisää laskentaa

- a) Laske $h(t) = e^t u(-t)$ ja $x(t) = e^{-t} u(t)$ konvoluutio $y(t) = h(t) * x(t)$ käyttämällä konvoluutio-ominaisuutta.

$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ ja $H(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega}$. Jälkimmäinen muunnos seuraa, koska $h(t) = x(-t)$. Kirjoitetaan $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$ osamurtoina:

$$Y(j\omega) = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{1-j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)}$$

Lasketaan A kuten yllä tai kertomalla yhtälö A :n nimittäjällä A :n sijoittamalla A :n nollakohta.

$$(1+j\omega)\frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{1-j\omega} = (1+j\omega)\frac{1}{(1+j\omega)(1-j\omega)}$$

$$A + \frac{B(1+j\omega)}{1-j\omega} = \frac{1}{1-j\omega}, \text{ sij. } j\omega = -1 \implies$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Samoin saadaan B :

$$(1-j\omega)Y = \frac{1}{(1+j\omega)}, \text{ sij. } j\omega = 1 \implies$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Siis $Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega}\right)$. Silloin

$$y(t) = \frac{1}{2}(x(t) + h(t)) = \frac{1}{2}(e^{-t}u(t) + e^t u(-t)) = \begin{cases} 0.5e^{-t}, & t > 0 \\ 0.5e^t, & t < 0 \end{cases}$$

- b) Laske $R(j\omega)$, kun $r(t) = e^{-|t|}\cos(2t)$. R_1 integroimalla, R_2 taulukosta, näiden konvoluutio.

Kyseessä on selvästikin kahden funktion tulo, jolloin vastaavan Fourier-muunnoksen saa konvoluution avulla. Merkitään tulosta $X(j\omega) = X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$:lla. Lasketaan ensin

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-j\omega)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt$$

$$= \frac{1}{1-j\omega} \Big|_{-\infty}^0 e^{(1-j\omega)t} - \frac{1}{1+j\omega} \Big|_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}$$

$$= \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega}$$

$$= \frac{2}{1+\omega^2}$$

ja sitten sivun 329 taulukosta

$$X_2(j\omega) = \pi[\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)].$$

Lasketaan nyt konvoluutio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+\omega^2} \pi[\delta(\omega-\tau-2) + \delta(\omega-\tau+2)]d\omega = \frac{2\pi}{1+(\tau+2)^2} + \frac{2\pi}{1+(\tau-2)^2},$$

eli ω :n avulla

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{1+(\omega+2)^2} + \frac{2\pi}{1+(\omega-2)^2}$$

32. Laske seuraavien signaalien Fourier-muunnokset:

a) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta[n-1] + \delta[n+1])e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega} + e^{j\omega} = 2 \cos \omega$$

b) $x[n] = (\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}e^{-j\omega n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} e^{-j\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Geometrisen sarjan summan "muljautuksen" voi ajatella vaikka muuttujanvaihtona $n = m + 1$.

33. Diskreettiainainen Fourier-muunnos on aina 2π -jaksollinen:

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1}$$

a) $|X(e^{j(\pi/4)})| = 5$ b) $\angle X(e^{j(\pi/4)}) = \arctan(4/3) \approx 0.927$

c) $X(e^{j(-\pi/4)}) = 3 - 4j$ d) $X(e^{j(\pi/4+2\pi)}) = 3 + 4j$

e) Jos $f_s = 4000$ Hz, niin $f_c = \frac{4000 \text{ Hz} \cdot (\pi/4)}{2\pi} = 500$ Hz

34. Jaksolliselle signaalille voidaan muodostaa Fourier-sarjan. Sille voidaan laskea myös Fourier-muunnos (s. 367-372, Example 5.5). Muistetaan myös, että $\sin(\theta) = \cos(\theta - \pi/2)$.

$$x[n] = \sin((\pi/6)n + \pi/4)$$

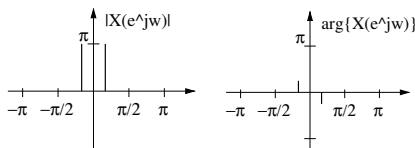
$$= \cos((\pi/6)n - \pi/4)$$

$$= 0.5(e^{j((\pi/6)n - \pi/4)} + e^{-j((\pi/6)n - \pi/4)})$$

$$= 0.5(e^{j(\pi/6)n}e^{-j(\pi/4)} + e^{-j(\pi/6)n}e^{j(\pi/4)})$$

$$= (0.5e^{-j\pi/4})e^{j(\pi/6)n} + (0.5e^{j\pi/4})e^{-j\pi/6n}$$

Jokaista eksponentiaalista signaalista $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ vastaa yksi piikki taajuustasossa taajuudella $\omega = \omega_0$, ja 2π -jaksollisuus huomioon ottaen: $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$. Koska sini/kosini voidaan esittää kahdella eksponenttifunktiolla, tulee taajuustasoon siis kaksi piikkiä per 2π -jakso. Amplitudispektriin tulee kyseisen kompleksisen kertoimen (tässä $\omega = \pi/6$: $0.5e^{-j\pi/4}$ ja $\omega = -\pi/6$: $0.5e^{j\pi/4}$) itseisarvo ($2\pi \cdot 0.5 = \pi$) ja vaihespektriin kompleksisen kertoimen kulma ($\omega = \pi/6$: $-\pi/4$, $\omega = -\pi/6$: $\pi/4$).



35. Päättelyä Fourier-määritelmästä tai -taulukoista.

- a) Tarkastelemalla diskreetin Fourier-muunnoksen laskukaavaa saadaan

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j \cdot 0n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 6.$$

- b) Tarkastelemalla signaalia havaitaan, että sen akaisiirto $x[n+2]$ tuottaa reaalisen, parillisen signaalin $r[n]$, jonka Fourier-muunnos on tunnetusti myöskin reallinen ja parillinen ($\arg(R(e^{j\omega})) = 0$). Sama toimii myös käänteisesti, eli mikäli luodaan ylläoleva reallinen parillinen signaali ja viivästetään sitä kahdella $r[n-2]$, saadaan tarkasteltu signaali $x[n]$. Taajuustasossa tämä tarkoittaa sitä, että tarkasteltavan signaalin taajuusvaste saadaan reaalisen signaalin Fourier-muunnoksen $R(e^{j\omega})$ ja akaisiirron $e^{-j\omega n_0}$ avulla

$$X(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} R(e^{j\omega}),$$

missä $R(e^{j\omega})$:n kerroin tulee juuri akaisiirrosta ($n_0 = 2$). Ylläoleva $X(e^{j\omega})$:n yhtälö on nyt muotoa $X(e^{j\omega}) = e^{j \arg X(e^{j\omega})} |X(e^{j\omega})|$, joten kulmaksi saadaan suoraan $\arg X(e^{j\omega}) = -2\omega$.

Kulma voidaan myös laskea seuraavasti:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-2j\omega} R(e^{j\omega}) = (\cos 2\omega - j \sin 2\omega) R(e^{j\omega}),$$

$$\arg X(e^{j\omega}) = \arctan \left[\frac{-R(e^{j\omega}) \sin 2\omega}{R(e^{j\omega}) \cos 2\omega} \right] = -2\omega.$$

- c) Tarkastelemalla käänteisen Fourier-muunnoksen kaavaa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

havaitaan, että

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x[0] \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 4\pi,$$

kun $x[0] = 2$.

- d) Diskreetin Fourier-muunnoksen kaavasta

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\pi n}.$$

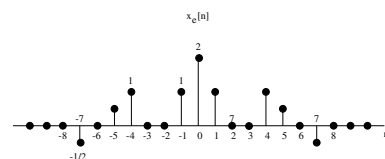
Kun n on parillinen, on $e^{-j\pi n} = 1$ ja kun n on pariton, on $e^{-j\pi n} = -1$. Näin saadaan

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n = 1 - 1 + 2 - 1 - 1 + 2 - 1 + 1 = 2.$$

- e) Taulukosta (s. 391) nähdään, että

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} \longleftrightarrow x_e[n] = \frac{1}{2}[x[-n] + x[n]].$$

Näin ollen signaalista tulee kuvassa 34 esitetyn mallinen.



Kuva 34: Parillinen signaali $x_e[n]$.

- f) Parsevalin relaatiosta saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2,$$

eli

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \cdot (1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1) = 28\pi.$$

Taajuusalueen derivaatalle pätee

$$j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \leftrightarrow nx[n].$$

Parsevalin relaation avulla voidaan nyt kirjoittaa

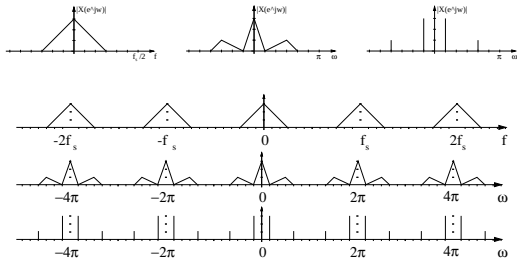
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |-jnx[n]|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 x[n]^2.$$

Ja tulokseksi saadaankin

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi(9 + 1 + 1 + 9 + 64 + 25 + 49) = 316\pi.$$

36. Reaalisella signaalilla on y -akselin suhteen symmetrinen amplitudispektri: Ne ovat aina 2π -jaksollisia, esimerkiksi välillä $-\pi.. \pi$ tai $0..2\pi$ ja niiden 2π -monikertoina (Katso tehtävä 33.). Jos taajuuksiin liitetään fyysinen arvo vähähdystä sekunnissa (f_s , H_z), niin näiden suhde on

$$\frac{f_c}{f_s} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{f_{norm}}{2}$$

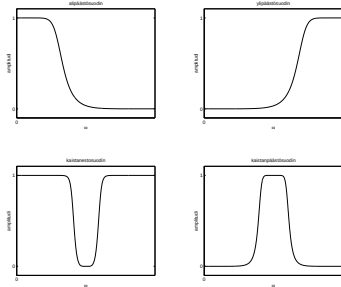
Kuva 35: Diskreetti-aikaisen sekvenssin spektrit ovat 2π -jaksollisia

37. Kuvan 11 vasemmassa sarakkeessa ylhäällä on kohinaa. Valkoisen kohinan spektri on vakio. Nyt meillä on vain pieni näyte kohinaa, joten sen spektrin oikealla alhaalla näyttää sotkuiselta. Siistimpi spektri saataisiin laskemalla F-muunnos pienemmissä ikkunoissa (pienempi taajuuden erottelukyky). Jos kohinanäytteitä otettaisiin paljon ja niiden osapektreistä laskettaisiin keskiarvo, päästäisiin myös lähemmäs vakiota.

Vasemmalla keskellä on jaksollinen signaali, joka on puheäänteestä "o". Perusjakson aika on kuvasta vajaa 0,01 sekuntia, mikä vastaa noin yli 100 Hertzin komponenttia. Sitten signaalista löytyy useita nopeampijaksoisia komponentteja. Taajuustason kuvaaja on siis yllimpänä.

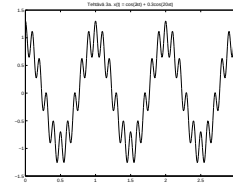
Vasemmalla alhaalla on nauhoituksen sähköjohdosta indusoitunut verkkojännitähäiriö, jaksota 0,02 sekuntia. Se näkyy suurena piikkinä oikean sarakkeen keskimmissä kuvassa kohdassa 50 Hz.

38. Suodintyypeissä alipäästö päästää läpi signaalin matalat taajuudet, jne. Amplitudivas-teesta voidaan erottaa **päästökaista**, **transitiokaista** ja **estokaista** tiettyjen **rajataa-juuksien** kohdalla.



39. Signaalin suodattaminen ali- ja ylipäästösuotimella

a) Signaali $x(t)$ aikatasossa:



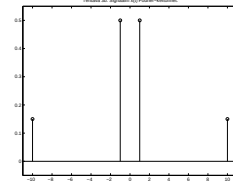
b) Selvitetään ensin peruskulmataanuus. Ensimmäisen summattavan $T_1 = 1$ ja toiselle $T_2 = 0.1$. Näin ollen summasignaaleille $T_0 = 1$ ja $\omega_0 = 2\pi$.

Lasketaan eksponenttientsitys kosineille käyttäen peruskulmataanuutta $\omega_0 = 2\pi$:

$$x(t) = a_{-10}e^{j(-10)(2\pi)t} + a_{-1}e^{j(-1)(2\pi)t} + a_1e^{j(2\pi)t} + a_{10}e^{j(10)(2\pi)t}$$

josta saadaan kertoimet

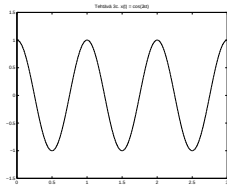
$$a_{-1} = a_1 = 0.5, \quad a_{-10} = a_{10} = 0.15, \quad \text{muulloin } a_k = 0$$



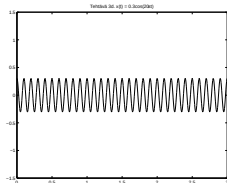
c) Ideaalinen alipäästösuodin rajataajuudella ω_c :

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Koska suodatus (konvoluutio $y(t) = h(t) * x(t)$) tarkoittaa taajuustasossa muunnos-ten kertolaskua $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$, niin Fourier-kertoimet a_{-1} ja a_1 kerrotaan ykkösellä ja a_{-10} ja a_{10} kerrotaan nolalla. Jäljelle jää siis aikatasossa matalataajuuk-sinen sini.



d) Ideaalisella ylipäästösuotimella jää suodatuksen jälkeen korkeampi komponentti jäl-jelle. LTI-järjestelmät toteuttavat siis **taajuusselektiivistä** suodatusta.



40. Konvoluutio-ominaisuus (s. 382)

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \leftrightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

Idea on siis se, että pyritään välttämään aikatason konvoluution laskeminen, mikä voi olla usein varsin ongelmallista. Tämä saavutetaan Fourier-muuntamalla konvolvoitavat signaa-lit, kertomalla muunnokset keskenään ja lopuksi käänteismuuntamalla saatu tulo lopputulokseksi $y[n]$.

a) $h[n] = (\delta[n-1] - \delta[n-2])$, $x[n] = 0.6^n u[n]$

Tässä nähdään heti, että taajuusvaste

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}$$

jolloin

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.6e^{-j\omega}} - e^{-j2\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.6e^{-j\omega}}$$

josta saadaan sama kuin aikatason konvoluutiosta:

$$y[n] = 0.6^{n-1} u[n-1] - 0.6^{n-2} u[n-2]$$

Tässä konvoluutio-ominaisuudesta ei ole juuri hyötyä, koska konvoluution laskemi-nenkin on helppoa!

b) $h[n] = 0.4^{n-1} u[n-1]$, $x[n] = (-0.7)^n u[n]$

Tässä jouduttaisiin konvolvoimaan kaksi eksponenttifunktiota keskenään, mikä on hankalampaa. Muunnetaan siis osittain:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Kuten laskarikierroksella 5 tehtävässä 3 joudutaan nyt suorittamaan **osittaismur-tokehittelmä**, jonka tarkoitus on saada $Y(e^{j\omega})$ kahden ensimmäisen asteen rationaa-lifunktion summaksi:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - 0.4e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Harjoittele osittaismurtokehittelmää! Lopputulos:

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - 0.4e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + 0.7e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \cdot \frac{(4/11)}{1 - 0.4e^{-j\omega}} + e^{-j\omega} \cdot \frac{(7/11)}{1 + 0.7e^{-j\omega}}$$

Ensimmäisen asteen lohkot voidaan käänteismuuntaa suoraan taulukon avulla:

$$y[n] = h[n] * x[n] = (4/11) \cdot 0.4^{n-1} u[n-1] + (7/11) \cdot (-0.7)^{n-1} u[n-1]$$

41. Tehtävässä annettu yhtälö on X -n ja G -n jaksollinen konvoluutio (s. 388-389), joka voi-daan kirjoittaa pienen muunnoksen jälkeen konvoluutiomerkinällä

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) G(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = X(e^{j\omega}) * G(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j\omega}$$

mistä seuraa konvoluutio-ominaisuutta käyttäen, että signaalin $y[n] = x[n] \cdot g[n]$ Fourier-muunnos on $1 + e^{-j\omega}$. Tällainen signaali on diskreetin Fourier-muunnostaulukon avulla

$$y[n] = F^{-1}\{1 + e^{-j\omega}\} = \delta[n] + \delta[n-1]$$

Ratkaisua voi hakea esimerkiksi graafisesti piirtämällä $x[n]$, haettava $g[n]$ ja $y[n]$ allekein ja etsiä sopiva $g[n]$. Kohdassa a) saadaan $g[n] = y[n]/x[n] = 1/(-1)^n$, $n = 0, 1$ eli

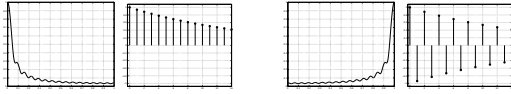
$$g[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Kohdassa b) saadaan $g[n] = y[n]/x[n] = 1/(1/2)^n$, $n = 0, 1$ eli

$$g[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

42. Otetaan esimerkki tehtävän tilanteesta. Alla olevassa kuvassa kaksi vasemmanpuoleista kuvaa esittävät alipäästösuutimen taajuustason taajuusvastetta ja impulssivastetta aikatasossa. Alipäästösuutinnan keskiarvoistaa (MA, moving average), joten impulssivasteen arvot samanmerkkisiä; suutimen käytöstä voidaan pitää painotetun keskiarvon laskemisenä. Amplitudivasteen x-akseli on normalisoitu välille 0..1, jossa 1 vastaa $\pi/4$ tai puolta näytteenottotaajuutta. Koska signaali on reaalinen, voi amplitudivasteen ajatella symmetriseksi y-akselin suhteen.

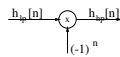
Kaksi oikeanpuoleista kuvaa esittävät tapausta, jossa joka toinen impulssivasteen arvo on asetettu vastaluvuksi eli alipäästösuutimen impulssivaste on kerrottu lukujonolla $\{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$. Tästä uudesta impulssivasteesta laskettu suutimen amplitudivaste on kolmannessa kuvassa. Huomataan, että suutimesta on tullut ylipäästösuodin. Tarkastellaan nyt tilannetta matemaattisesti, joka lähtee kauniista esityksestä $e^{j\pi} = -1$.



Kuva 36: Esimerkki alipäästösuutimen impulssivasteen moduloinnista jonolla $(-1)^n$. (a) $|H_{lp}(e^{j\omega})|$, (b) $h_{lp}[n]$, (c) $|H_{lp}(e^{j\omega})|$, (d) $h_{lp}[n]$.

a) Saatetaan impulssivaste muotoon

$$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n] = e^{-j\pi n} h_{lp}[n].$$

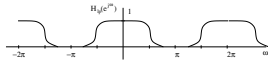


Kuva 37: Modulointi lukujonolla $(-1)^n$.

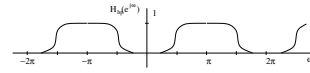
Fourier-muunnokseksi tulee nyt

$$\begin{aligned} H_{hp}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{hp}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\pi n} h_{lp}[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{lp}[n] e^{-j(\omega+\pi)n} = H_{lp}(e^{j(\omega+\pi)}) \end{aligned}$$

eli siis taajuusvastetta siirretään π :n verran eteenpäin. Huomaa, että **diskreetin** Fourier-muunnoksessa taajuustaso on 2π -jaksollinen (2π vastaa näytteenottotaajuutta). Jos tilanne piirretään, on alipäästösuutimen taajuusvaste



Ja näin ollen saatu H_{hp} :n taajuusvaste on H_{hp} on siis ylipäästösuutimen taajuusvaste.



b) Tehdään a) -kohta käänteisesti

$$h_{lp}[n] = (-1)^n h_{hp}[n] = e^{-j\pi n} h_{hp}[n].$$

Fourier-muunnokseksi tulee nyt

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = H_{hp}(e^{j(\omega+\pi)}).$$

43. Aikatazon konvoluutio vastaa taajuustasossa muunnosten kertolaskua

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

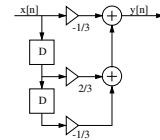
Tiedetään LTI-järjestelmästä S, että sillä on impulssifunktio

$$h[n] = \frac{1}{3}(-\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2])$$

a) Impulssivasteen pituus on äärellinen (kolme). Siten järjestelmässä ei ole takaisinkytkentää, se on BIBO-stabiili ja vastaava differenssiyhtälö voidaan kirjoittaa impulssivasteen kertoimien avulla

$$y[n] = \frac{1}{3}(-x[n] + 2x[n-1] - x[n-2])$$

Järjestelmän lohkokaavio on kuvassa 38.



Kuva 38: Lohkokaavio

b) Taajuusvaste saadaan joko muunnostauluista tai suoraan määritelmästä

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

Nyt siis $H(e^{j\omega}) = (-1/3) + (2/3)e^{-j\omega} + (-1/3)e^{-j2\omega}$

Tästä saadaan siis kertoimiksi $b_0 = -1/3$, $b_1 = 2/3$, $b_2 = -1/3$ ja jakaja on pelkkä vakio 1 eli $a_0 = 1$ ja $a_k = 0$, $k \neq 0$.

c) Tulos saadaan joko käyttämällä muunnoskaavoja $h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega})$, $\delta[n] \leftrightarrow 1$, $\delta[n - n_0] \leftrightarrow e^{j\omega n_0}$ tai laskemalla Fourier-muunnosta:

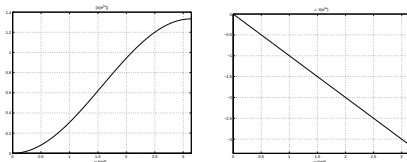
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^2 h[n] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{3}(-1 + 2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}) = e^{-j\omega} \left(-\frac{1}{3}(e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega}) \right) \\ &= e^{-j\omega} \left(\frac{2(1 - \cos(\omega))}{3} \right) \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \left| \frac{2(1 - \cos(\omega))}{3} \right| \\ \arg\{H(e^{j\omega})\} &= -\omega \end{aligned}$$

Matlabissa:

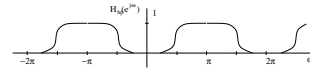
```
wman = [0: pi/256 : pi];
b0 = -1/3; b1 = 2/3; b2 = -1/3;
HFman = b0 + b1*exp(-j*wman) + b2*exp(-j*2*wman);
plot(wman, abs(HFman)); % amplitudivaste, lin. asteikko
plot(wman, 20*log10(abs(HFman))); % amplitudivaste, log. asteikko
plot(wman, angle(HFman)); % vaihevaste
```



Kuva 39: Ylipäästösuutimen amplitudivaste ja vaihevaste

Amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ (Kuva 39) saa arvon nolla taajuudella $\omega = 0$ ja maksimiarvon 1 taajuudella $\omega = \pi$ kasvaen monotonisesti. Kyseessä on siis ylipäästösuodin, joka siis vahvistaa signaalin muutoksia ja vaimentaa vakiosignaalia.

Kyseinen systeemi on kausaalinen ja stabiili, koska se on tyypiltään FIR (äärellisen pitkä impulssivaste): rajoitettu syöte tuottaa aina rajoitetun vasteen. (Toinen tyyppi oli siis IIR, äärettömän pitkä impulssivaste, joka voi olla epästabiili, jos takaisinkytkentä vahvistaa liikaa.)



b) Tehdään a) -kohta käänteisesti

$$h_{lp}[n] = (-1)^n h_{hp}[n] = e^{-j\pi n} h_{hp}[n].$$

Fourier-muunnokseksi tulee nyt

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = H_{hp}(e^{j(\omega+\pi)}).$$

43. Aikatazon konvoluutio vastaa taajuustasossa muunnosten kertolaskua

$$y[n] = h[n] * x[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

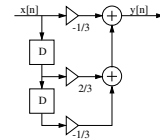
Tiedetään LTI-järjestelmästä S, että sillä on impulssifunktio

$$h[n] = \frac{1}{3}(-\delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2])$$

a) Impulssivasteen pituus on äärellinen (kolme). Siten järjestelmässä ei ole takaisinkytkentää, se on BIBO-stabiili ja vastaava differenssiyhtälö voidaan kirjoittaa impulssivasteen kertoimien avulla

$$y[n] = \frac{1}{3}(-x[n] + 2x[n-1] - x[n-2])$$

Järjestelmän lohkokaavio on kuvassa 38.



Kuva 38: Lohkokaavio

b) Taajuusvaste saadaan joko muunnostauluista tai suoraan määritelmästä

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

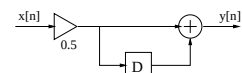
Nyt siis $H(e^{j\omega}) = (-1/3) + (2/3)e^{-j\omega} + (-1/3)e^{-j2\omega}$

Tästä saadaan siis kertoimiksi $b_0 = -1/3$, $b_1 = 2/3$, $b_2 = -1/3$ ja jakaja on pelkkä vakio 1 eli $a_0 = 1$ ja $a_k = 0$, $k \neq 0$.

44. Olkoon annettuna taajuusvaste $H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot (1 + e^{-j\omega})$. Taajuusvaste voidaan hajottaa amplitudi- ja vaihevasteeseen $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg(H(e^{j\omega}))}$.

Taajuusvasteen "hahmotelussa" kannattaa tehdä taulukko, johon laskee $H(e^{j\omega})$:n arvoja joillakin "tärkeillä" taajuuksarvoilla, kuten $\omega = \{0, \dots, \pi/2, \pi\}$.

a) Saadaan $h[n] = 0.5\delta[n] + 0.5\delta[n-1]$ eli differenssiyhtälönä $y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$. Kyseessä siis FIR-tyyppinen suodin, ei ei takaisinkytkentöjä, katso kuva 40.



Kuva 40: $y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$

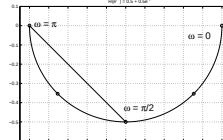
b) Kun syötteenä on yksikköaskel $u[n]$, ulostulona on askelvaste $s[n]$, joka tässä tapauksessa on

$$s[n] = \sum_{m=-\infty}^n h[m] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 0.5, & n = 0 \\ 1, & n \geq 1 \end{cases}$$

c) Lasketaan $H(e^{j\omega})$:n kompleksisia arvoja, kun $\omega = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$. Interpoloidaan arvioiden lausekkeen $1 + e^{j\omega}$ käyttäytymistä ja saadaan kuvaaja 41.

Matlabilla sama:

```
w = [0 : pi/256 : pi]; w2 = [0 : pi/4 : pi];
H = 0.5 + 0.5*exp(-j*w); H2 = 0.5 + 0.5*exp(-j*w2); % taajuusvaste
plot(real(H), imag(H)); % piirretään kompleksitasoon
hold on; plot(real(H2), imag(H2), 'o'); % lisätään viisi palloa
```



Kuva 41: $H(e^{j\omega})$ kompleksitasossa. Taajuus käyrän parametrina (ei x- eikä y-akseli!). Origovektori osoittaa tilannetta $\omega = \pi/2$, jolloin $H(e^{j\omega}) = 1 - j$ eli $|H(e^{j\omega})| = 1/\sqrt{2}$ ja $\arg\{H(e^{j\omega})\} = -\pi/4$.

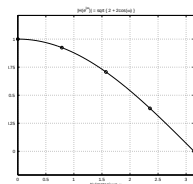
Taajuusvasteen amplitudi halutulla taajuudella saadaan nyt origovektorin pituutena origosta taajuuden osoittamaan paikkaan käyrällä. Taajuusvasteen vaihe halutulla taajuudella saadaan origovektorin ja x-akselin kulmana.

d) Lasketaan amplitudivastetta $|H(e^{j\omega})|$. Kompleksiluvun itseisarvo (Kuva 42) saadaan esimerkiksi:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= 0.5 \cdot |1 + e^{-j\omega}| = |(0.5 + 0.5 \cos(\omega)) + j(-0.5 \sin(\omega))| \\ &= \sqrt{(0.25 + 0.5 \cos(\omega) + 0.25 \cos^2(\omega)) + 0.25 \sin^2(\omega)} = \sqrt{0.5 + 0.5 \cos(\omega)} \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}
 |H(e^{j\omega})| &= \sqrt{H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})} = \sqrt{H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})} \\
 &= \sqrt{0.25 \cdot (1 + e^{-j\omega})(1 + e^{j\omega})} = \sqrt{0.25 \cdot (1 + e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 1)} \\
 &= \sqrt{0.5 + 0.5 \cos(\omega)}
 \end{aligned}$$

Kuva 42: Amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$

Matlabilla amplitudivasteen piirto:

```
plot(w,abs(H));
```

- e) Lasketaan vaihevaste $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ (Kuva 43) joko eksponenttifunktiosta tai käyttämällä taulukkoa (trigonometriset kulmat). Kulmaa laskettaessa vakiokerroin 0.5 ei vaikuta mitään.

$$\begin{aligned}
 \arg\{H(e^{j\omega})\} &= \arg\{1 + e^{-j\omega}\} \\
 &= \arg\{(e^{-0.5j\omega})(e^{0.5j\omega} + e^{-0.5j\omega})\} \\
 &= \arg\{(e^{-0.5j\omega})\} + \arg\{(e^{0.5j\omega} + e^{-0.5j\omega})\} \\
 &= \arg\{(e^{-0.5j\omega})\} + 0 = -0.5\omega
 \end{aligned}$$

tai vastaava vaihtoehtoisesti

$$\begin{aligned}
 \arg\{H(e^{j\omega})\} &= \arg\{1 + e^{-j\omega}\} = \arg\{(1 + \cos(\omega)) + j(-\sin(\omega))\} \\
 &= \arctan\left(\frac{-\sin(2\frac{\omega}{2})}{1 + \cos(2\frac{\omega}{2})}\right) = \arctan\left(\frac{-2\sin(\frac{\omega}{2})\cos(\frac{\omega}{2})}{1 + 2\cos^2(\frac{\omega}{2}) - 1}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{-\sin(\frac{\omega}{2})}{\cos(\frac{\omega}{2})}\right) = -0.5\omega
 \end{aligned}$$

Matlabilla vaihevasteen piirto:

```
plot(w,angle(H));
```

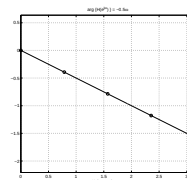
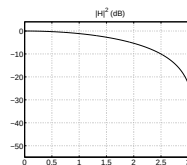
- f) Desibeliasteikko, vertaa kuvia 42 ja 43, joista jälkimmäisessä $20 \log_{10}|H(e^{j\omega})|$. Huomaa, että $20 \log_{10} 1 = 0$ dB. Siten esimerkiksi tehon tuplaus $10 \log_{10} 2 = 3.01$ dB vastaa kolmen desibelin muutosta.

Matlabilla amplitudivasteen piirto:

```
plot(w,20*log10(abs(H)));
```

- g) Ryhmäviive $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\}$.

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega} (-0.5\omega) = 0.5$$

Kuva 43: Vaihevaste $\arg\{H(e^{j\omega})\}$ Kuva 44: Tehollinen desibelikuvaaja $20 \log_{10}|H(e^{j\omega})|$

- h) 9. asteen suodin (10 kerrointa) on jyrkempi ja hitaampi.

- *i) Matlabissa siirtofunktio esitetään sen kertoimien avulla:

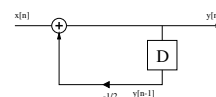
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-2j\omega}}{1 + 0.3e^{-j\omega} - 0.2e^{-2j\omega}}$$

```
num = [1 0 2];
den = [1 0.3 -0.2];
freqz(num,den);
```

45. Kausaalinen ja stabiili LTI-systeemi on määrätty seuraavan differenssiyhtälön avulla, joka havaitaan IIR-tyyppiseksi (takaisinkytkentä):

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

- a) Lohkokkaavio, josta käy ilmi takaisinkytkentä eli rekursiivinen laskenta!

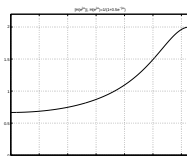


- b) Käytetään hyväksi muunnosominaisuutta $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned}
 Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) \\
 Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \\
 Y(e^{j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \\
 H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}
 \end{aligned}$$

- c) Hahmottele kuten ykköstehtävässä; saadaan ylipäästösuodin.

$$\begin{aligned}
 |H(e^{j\omega})| &= \sqrt{H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{1 + 0.5e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 + 0.5e^{j\omega}}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{1 + 0.5e^{j\omega} + 0.5e^{-j\omega} + 0.25}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{1.25 + \cos(\omega)}}
 \end{aligned}$$

Kuva 45: $|H(e^{j\omega})|$

- d) Esim. taulukosta 5.2.: $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$, $|a| < 1$,

$$\Rightarrow h[n] = (-0.5)^n u[n]$$

46. Tehtäväpaperissa piirretyt suotimen rajataajuus on 0.5π .

- a) Katso vasemmanpuoleisinta kuvaa.

- b) Lineaarivaiheiselle suotimelle kertoimet ovat *symmetrisiä* siten, että "keskimmäinen" viive voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi ja rakentaa jäljelle jääneistä kosini- ja sini-komponentteja.

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega} + \dots + a_1 e^{-j8\omega} + a_0 e^{-j9\omega} \\
 &= e^{-j9\omega/2} (a_0 e^{+j9\omega/2} + a_1 e^{+j7\omega/2} + a_2 e^{+j5\omega/2} + \dots + a_1 e^{-j7\omega/2} + a_0 e^{-j9\omega/2}) \\
 &= \underbrace{e^{-j9\omega/2}}_{C, |z|=1} \cdot \underbrace{(2a_0 \cos(9/2\omega) + 2a_1 \cos(7/2\omega) + \dots)}_R
 \end{aligned}$$

- c) Kuten tehtävässä 44b ja 44h. Jyrkempi suodin tarkoittaa hitaampaa suodinta ja päinvastoin.

- *d) Suorakaidepulssin käänteismuunnos on sinc-funktio ja päinvastoin. Mitä monimutkaisempi/jyrkempi suodin toteutetaan (realisoidaan), sitä enemmän siinä tarvitaan laskentaa ja suodin hidastaa enemmän. Suotimen suunnitteluun (FIR ja IIR) tutustutaan T-61.246-kurssilla.

47. Moduli $|H(j\omega)|$ on kompleksiluvun "pituus" eli $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\arg H(j\omega)}$. Kirjoitetaan siirtofunktio polaarimuodossa $r e^{j\alpha}$:

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} \\
 &= \frac{\sqrt{1 + \omega^2} e^{-j\alpha}}{\sqrt{1 + \omega^2} e^{j\alpha}} \\
 &= \frac{e^{-j\alpha}}{e^{j\alpha}} \\
 &= e^{-j2\alpha}
 \end{aligned}$$

missä $\alpha = \arctan(\omega)$.

Koska eksponenttifunktion moduli on aina yksi, $|H(j\omega)| = 1 = A$, niin kyseessä on ns. all-pass-suodin, jonka vahvistus kaikille taajuuksille on vakio.

Ryhmäviive $\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} (-2 \arctan(\omega)) = \frac{d}{d\omega} (2 \arctan(\omega)) = \frac{2}{1 + \omega^2}$. Erityisesti ryhmäviive on aina positiivinen. Mitä on tämän yhteys järjestelmän kausaalisuuteen?

48. *Tutkitaan mekaanista systeemiä, jonka liikeyhtälö on muotoa

$$Bv(t) + K \int v(t) dt = f(t).$$

Vastaavatyypisistä tilanteista kerrotaan kirjan sivuilla 473-475, sovelluskohteena auton jousitus tiellä.

- a) Jousta kokoon puristava voima $f_s(t) = K \int v(t) dt$. Nopeus $v(t)$ voidaan nyt kirjoittaa f_s :n funktiona

$$v(t) = \frac{1}{K} \frac{d}{dt} f_s(t).$$

Differentsiaaliyhtälö saa tämän avulla muodon

$$\frac{B}{K} \frac{d}{dt} f_s(t) + f_s(t) = f(t).$$

Systeemi antaa syötteelle, joka on muotoa $f(t) = e^{j\omega t}$ vasteen $f_s(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$, eli siis

$$\frac{B}{K} H(j\omega) j\omega e^{j\omega t} + H(j\omega) e^{j\omega t} = e^{j\omega t}.$$

Ratkaistaan ylläoleva taajuusvasteen $H(j\omega)$ suhteen

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{B}{K} j\omega} = \frac{1 - \frac{B}{K} j\omega}{1 + \frac{B^2}{K^2} \omega^2}.$$

Tutkitaan seuraavaksi taajuusvasteen magnitudia

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{B^2}{K^2}\omega^2} \sqrt{1 + \frac{B^2\omega^2}{K^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{B^2}{K^2}\omega^2}}.$$

Funktio on selvästikin muotoa $H(j\omega) \approx \frac{1}{1+\omega}$, eli siis selvästikin alipäästösuodin (kokeile taajuuksia $\omega = \{0, 10, 100\}$).

- b) Vaimenninta kokoon puristava voima $f_d(t) = Bv(t)$. Nopeus saadaan tämän avulla muotoon

$$v(t) = \frac{1}{B}f_d(t)$$

ja differentiaaliyhtälö

$$f_d(t) + \frac{K}{B} \int f_d(t) dt = f(t).$$

Ratkaistaan yhtälö a-kohdan tapaan sijoittamalla $f_d(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ yhtälöön, jolloin saadaan

$$H(j\omega)e^{j\omega t} + \frac{K}{B} \frac{1}{j\omega} H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}.$$

Näin saadaankin taajuusvaste

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{K}{B} \frac{1}{j\omega}} = \frac{1 + \frac{K}{B} j}{1 + \frac{K^2}{B^2\omega^2}}.$$

Tutkimalla jälleen taajuusvasteen magnitudia

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + \frac{K^2}{B^2\omega^2}} \sqrt{1 + \frac{K^2}{B^2\omega^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{K^2}{B^2\omega^2}}}$$

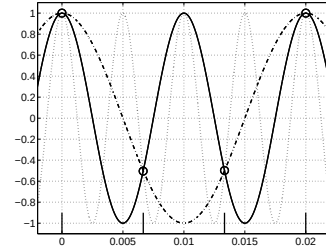
havaitaan, että funktio on muotoa $H(j\omega) \approx \frac{1}{1+\frac{1}{\omega}}$, jonka kuvaaja on ylipäästötyyppiä.

49. Alkuperäisen signaalin korkein taajuus (ainoa) on 100 Hertziä. Siten matalin näytteenototaajuus saa olla 200 Hertziä eli näytteenottovälinä 0.005 sekuntia tai vähemmän, jotta laskostumista ei tapahdu.

Viimeisessä kohdassa tapahtuu siis laskostumista. Kun $T_s = 2/300 \approx 0.00666$, $f_s = 150$ Hz, eli kun näytteenottotaajuus on pienempi kuin kaksi kertaa korkein (ainoa) taajuus, niin

$$\begin{aligned} x[n] = x(n/f_s) = x(nT_s) &= \cos(2\pi 100 n (2/300)) \\ &= \cos(2\pi (200/300) n - 2\pi n) \\ &= \cos(2\pi (-100/300) n) \\ &= \cos(2\pi 50 n (2/300)) \end{aligned}$$

Nähdään siis, että samat diskreetit näytestiheet toteutuvat myös 50 Hertzin jatkuvalla kosinikomponentilla. Signaaliin on siis tullut taajuus, jota siinä alunperin ei ole ollut.



Kuva 46: Uusi 50 Hz:n taajuus, kun $T_s = 0.00666$ s. Myös esimerkiksi 200 Hz:n komponentti toteuttaa diskreetit pisteet.

Sama vielä taajuustasossa: Alunperin jatkuva 100 Hz:n kosinikomponentti, jota näytteis-tetään liian pienellä näytteenottotaajuudella 150 Hz. Näytteet sopivat kaikkiin jatkuva-aikaisiin kosinikomponentteihin 50 + 150k Hz ja -50 + 150k Hz. Diskreettiä signaalia palautettaessa nähdään vain taajuudet nollasta puoleen näytteenototaajuuteen.

50. Impulssijuna

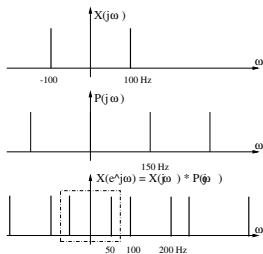
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

Koska $p(t)$ on jaksollinen funktio ajan t suhteen jaksolla T_s , se voidaan esittää Fourier-sarjana. T_s esittää tässä näytteenottoväliä ($s = \text{sampling}$).

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(2\pi kt/T_s)}$$

jossa

$$a_k = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t) e^{-j(2\pi kt/T_s)} dt = \frac{1}{T_s} e^{-j(2\pi kt/T_s)}|_{t=0} = \frac{1}{T_s}$$

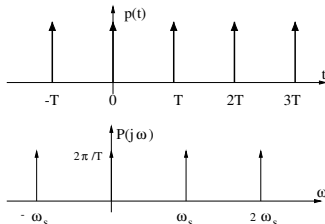


kaikille k -n arvoille tulee $\delta(t)$ -n integroimisen määritelmästä. (Taulukkokirjasta: $\int \delta(t) dt = 1$, $\int \delta(t)x(t) dt = x(t)|_{t=t_0}$.)

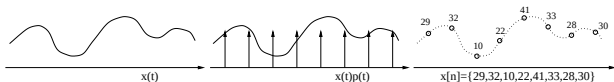
Täten $a_k = \frac{1}{T_s}$ eli

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi kt/T_s)} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s kt}$$

kun $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$



Esimerkki näytteenotosta aikatasossa (kuvattu kyseisellä mallilla):



51. Kaavan (4.22) mukaan jaksollisen signaalin Fourier-sarjaesityksen

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

jossa a_k ovat Fourier-kertoimet ja ω_0 peruskulmataajuus, Fourier-muunnos voidaan esittää muodossa

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Näin ollen edellisen tehtävän impulssijuna, jossa kaikki kertoimet $a_k = 1/T_s$ ja peruskulmataajuutena ω_s , voidaan esittää

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Näytteistys aika- ja taajuustasossa voidaan siis johtaa

$$x[n] = x(t) \cdot p(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} [P(j\omega) * X(j\omega)] = X(e^{j\omega})$$

Varsinainen lasku, muistetaan $\int \delta(t)x(t)dt = x(t)|_{t=0}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} [P(j\omega) * X(j\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(j\theta) X(j(\omega - \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k\omega_s) X(j(\omega - \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\theta - k\omega_s) X(j(\omega - \theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

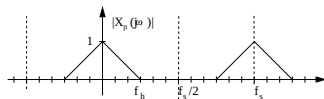
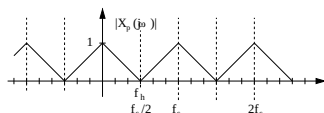
Eli diskreetin signaalin spektri on analogisen signaalin spektri kopioituna näytteenotto-taajuuden välein ja summattuna yhteen.

52. Huomaa ensin, että jatkuvan ajan $X(j\omega)$ -n spektri on symmetrinen ω -akselin suhteen. Kun signaalia näytteistetään, sen diskreetin ajan signaalin spektri muuttuu 2π -jaksolliseksi, toisin sanoen, spektrit kopioituvat näytteenottotaajuuden välein. Korkeimmaksi havaittavaksi taajuuksi jää puolet näytteenottotaajuudesta.

Edellisten tehtävien mukaisesti:

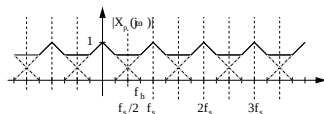
$$x[n] = x_p(nT_s) = x(t)p(t) \quad \leftrightarrow \quad X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Aikatazon kertolasku vastaa taajuustason konvoluutiota. Konvoluutio merkitsee käytännössä $X(j\omega)$ -n kopiaimista (P -n) f_s -n välein, mistä johtuu diskreetin signaalin spektrin jaksollisuus f_s -n eli toisaalta 2π -n välein.

Kuva 47: $f_h = 0.25 f_s$ Kuva 48: $f_h = 0.5 f_s$

- a) Kuva 47. Korkein taajuus vain neljäsosa näytteenottotaajuudesta. Ei tapahdu laskostumista.
 b) Kuva 48. Rajatapaus Nyqvistin taajuudella (puoli näytteenottotaajuutta).
 c) Kuva 49. Selvää laskostumista. Konvoluutiolaskusta nähdään, että $X_p(j\omega) = X(e^{j\omega})$ on summa **kaikista** laskostuneista taajuuksista. Spektriä kuvaa siis alla olevassa kuvassa paksu yhteinen viiva.

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \\ &= \frac{1}{T_s} \left(\dots + X(j(\omega - \omega_s)) + X(j\omega) + X(j(\omega + \omega_s)) + X(j(\omega + 2\omega_s)) + \dots \right) \end{aligned}$$

Kuva 49: $f_h = 0.75 f_s$

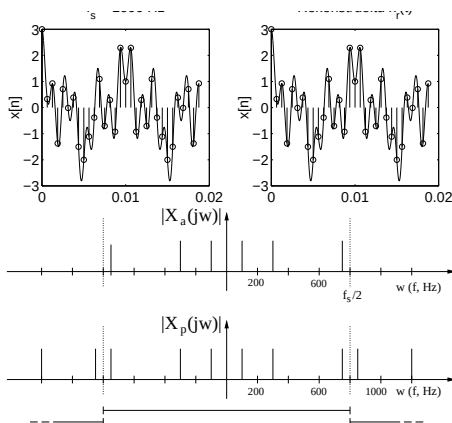
Näytteistys voidaan nähdä siis jatkuva-aikaispektrin X :n kopiointina näytteenottotaajuu-
 den välein. Koska $|X|$ on symmetrinen, se voidaan nähdä myös taajuuksien kääntämisellä
 (**jokaisen**) Nyquist-taajuuden (näytteenottotaajuu-
 den puolikas) yli.

Kun signaaleja rekonstruoidaan, toisin sanoen diskreetistä lukujonosta kehitetään jatkuva-
 aikainen signaali, voidaan huomata vain taajuuksia, jotka ovat alle Nyquistin taajuuden.
 Ylimenevät taajuudet aiheuttavat laskostumista pienemmille taajuuksille.

Tehtävän esimerkit.

Tehtävässä $X(j\omega)$ on näytteistetty kolmella eri taajuudella f_s : 1600 Hz, 800 Hz ja 400
 Hz, Nyquist-taajuus on puolet näytteenottotaajuudesta $f_s/2$ eli vastaavasti 800 Hz, 400
 Hz ja 200 Hz. Olkoon f_h korkein taajuus syötesignaaleissa.

- i) $f_s = 1600$ Hz, $f_s/2 = 800$ Hz $> f_h$. Ei laskostumista. Kaikki kolme taajuutta voidaan
 palauttaa. Kuva 51.



Kuva 51: $f_s = 1600$ Hz. Yläkuvassa summakosini näytteistettynä ja palautettuna: ei laskostu-
 mista. Alakuvassa taajuuskaistalle $-800..800$ Hz ei ole laskostunut taajuuksia.

- ii) $f_s = 800$ Hz, $f_s/2 = 400$ Hz $< f_h$. Havaitaan enää taajuuksia 400 Hertziin asti
 eli alkuperäinen taajuus 750 Hz on kadonnut. Se on laskostunut taajuudelle 50 Hz.

53. Tutkitaan siis jatkuva-aikaista signaalia

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)$$

taajuuksilla $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 300$ Hz ja $f_3 = 750$ Hz. Muista myös $\omega = 2\pi f$, jos tarvi-
 taan kulmataajuutta.

Koska kosinifunktio on jaksollinen, tiedetään, että $x(t)$ on jaksollinen ja sille voidaan etsiä
 Fourier-sarjaesitys. Lasketaan tai havaitaan suoraan, että $x(t)$:n perustaajuus $f_0 = 50$ Hz.
 Näin saadaan esitettyä $f_1 = 2f_0$, $f_2 = 6f_0$ ja $f_3 = 15f_0$, ja edelleen käyttämällä Fourier-
 sarjan määritelmää

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi f_0)t}$$

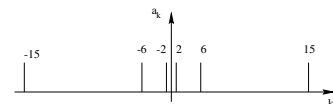
ja eksponenttifunktiota

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi 2f_0 t) + \cos(2\pi 6f_0 t) + \cos(2\pi 15f_0 t) \\ &= \frac{1}{2} \left((e^{j2\pi 2f_0 t} + e^{-j2\pi 2f_0 t}) + (e^{j2\pi 6f_0 t} + e^{-j2\pi 6f_0 t}) + (e^{j2\pi 15f_0 t} + e^{-j2\pi 15f_0 t}) \right) \end{aligned}$$

saadaan Fourier-sarjan kertoimet

$$a_{-15} = a_{-6} = a_{-2} = a_2 = a_6 = a_{15} = \frac{1}{2}$$

Jokainen $x(t)$:n sinusoidi tuottaa piikin Fourier-spektriin. **HUOM!** Tässä tehtävässä käsi-
 tellään yksinkertaistaen vain "puhtaita" kosineja, joiden kulma on nolla, ts. Fourier-kerroin
 on reaalinen. Fourier-kertoimet (muunnos) ovat yleensä kompleksisia eli signaalikompo-
 nentit ovat eri vaiheissa toistensa suhteen. Eri vaiheet komponentit, vaikkapa $\cos(2\pi f t)$
 ja $\cos(2\pi f t - \pi)$, voivat kumota toisensa. Kuvassa 50 Fourier-kertoimien amplitudin suu-
 ruus (vaihe siis tässä tehtävässä nolla).



Kuva 50: Fourier-sarjan esitys signaalille $x(t)$. Fourier-kertoimen indeksi kertoo perustaajuuden
 monikerran.

Fourier-sarjan esitys vastaa $X(j\omega)$:n spektriä, kun x-akselille asetetaan taajuudet $f_1 =$
 100 Hz, $f_2 = 300$ Hz ja $f_3 = 750$ Hz.

Signaali näytteistetään taajuudella $f_s = 1/T_s$ eli alkuperäisestä signaalista otetaan f_s
 kappaletta näytteitä joka sekunti.

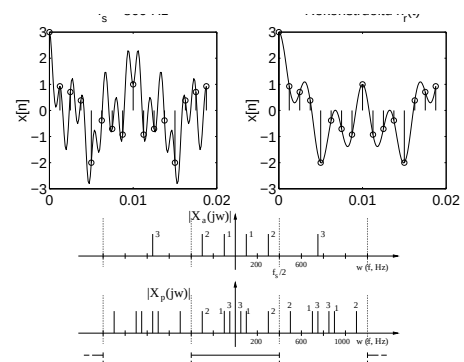
$$x[n] = x(nT) = x\left(\frac{n}{f_s}\right) = \left(\cos(2\pi \frac{f_1}{f_s} n) + \cos(2\pi \frac{f_2}{f_s} n) + \cos(2\pi \frac{f_3}{f_s} n) \right)$$

Näytteenotto-prosessi voidaan siis tulkita jatkuva-aikaisen signaalin $x(t)$ kertomisena im-
 pulssijunan $p(t)$ kanssa. Taajuustason esitys on muunnosten konvoluutio, jolloin

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

Katso kuvaa 52.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{750}{800} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{-50}{800} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{800} n) + \cos(2\pi \frac{300}{800} n) + \cos(2\pi \frac{50}{800} n) \end{aligned}$$



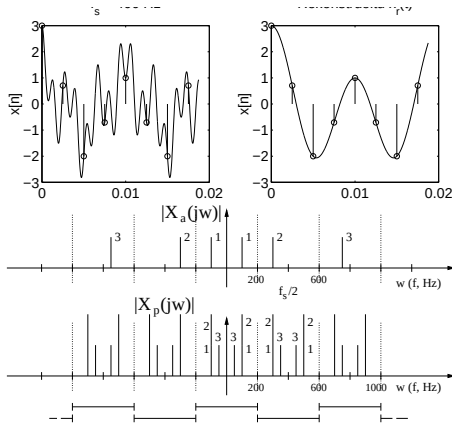
Kuva 52: $f_s = 800$ Hz. Yläkuvassa summakosini näytteistettynä ja palautettuna: näytteenot-
 totaajuus ei ole riittänyt informaation säilyttämiseen sellaisenaan. Alakuvassa 750 Hz:n kom-
 ponentti on laskostunut 50 Hz:ksi mielenkiintoisella kaistalla $-400..400$ Hz.

- iii) $f_s = 400$ Hz, $f_s/2 = 200$ Hz $< f_h$. Taajuudella 100 Hz vierastumista. Taajuudet 300
 ja 750 Hz eivät ole enää havaittavissa. Katso kuvaa 53.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{300}{400} n) + \cos(2\pi \frac{750}{400} n) \\ &= \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{-100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{-50}{400} n) \\ &= 2 \cos(2\pi \frac{100}{400} n) + \cos(2\pi \frac{50}{400} n) \end{aligned}$$

Näytteenotto-oreeman mukaan signaali voidaan palauttaa alkuperäisenä vain jos sen kor-
 kein taajuus on enintään puolet näytteenottotaajuudesta.

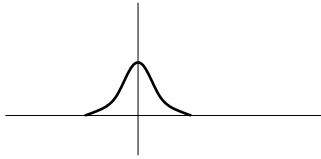
Signaalin laskostumista tietyille taajuuksille voidaan käyttää hyväksi. Monen näytteen-
 ottotaajuuden järjestelmissä (multirate systems) muun muassa kapeakaistaisen suoti-
 mien laskennan kompleksisuutta voidaan vähentää huomattavasti.



Kuva 53: $f_s = 400$ Hz. Yläkuvassa summakosini näytteistettynä ja palautettuna: signaali on muuttunut entistä enemmän näytteenotossa.

54. Signaalin rekonstruointi näytteistä

a) Reaaliselle signaalille $X(j\omega)$ on symmetrinen. Esimerkiksi kuva 54.



Kuva 54: Mielivaltainen $X(j\omega)$

b) Diskreetti Fourier-muunnos on 2π -jaksollinen. Esimerkiksi kuva 55.

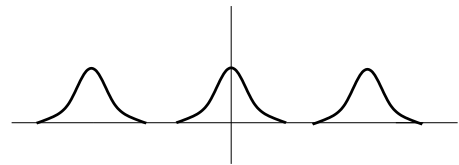
c) Alipäästösuodatuksella voidaan palauttaa alkuperäinen signaali. Esimerkiksi kuva 56.

d) Kun

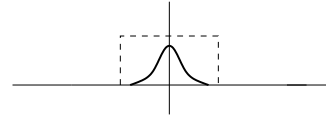
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

niin laskemalla tai taulukosta saadaan

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t / \pi)$$



Kuva 55: Jaksollinen $X_p(j\omega)$



Kuva 56: Palautettu $X_r(j\omega)$

Tällöin kukunkin diskreettiin mittauspisteeseen voidaan ajatella sinc-käyrä ja näiden summasta tulee rekonstruoitu signaali. Katso kuva 7.10(c) kirjasta.

Kaavakokoelma

Merkintä $x(t)$ viittaa jatkuva-aikaisen signaaliin ja $x[n]$ diskreettiaikaiseen sekvenssiin. Yleisesti signaaleille ja järjestelmille y on vaste (output), h on järjestelmän impulssivaste ja x syöte (input). $\delta(t)$ ja $\delta[n]$ ovat yksikköimpulssifunktioita. $u(t)$ ja $u[n]$ ovat yksikköaskelfunktioita. $s(t)$ ja $s[n]$ ovat askelvastefunktioita. Nousuaika määritellään ajaksi, joka kuluu askelvasteen nousu- ja laskevasteen väliin. 10%:sta 90%:iin maksimiarvostaan.

Merkinnöissä on pientä vaihtelua. Fourier-sarjoissa ω_0 (rad), Ω_0 (rad/s) on peruskulmataajuus, f_0 (Hz) perustaaajuus, T (s) ja N (1) jatkopituuksia. Diskreetillä signaalilla on näytteenottoaika f_s tai f_T (Hz). Jatkuvalle $\Omega = 2\pi f$, $f = 1/T$, tai kirjoitetaan myös ω , yksikkönä joka tapauksessa rad/s. Diskreetille $(N, n, k \in \mathbb{Z})$ $\omega = 2\pi\Omega/\Omega_s = 2\pi f/f_s$.

Kompleksiluvut, Euler, geometrinen sarja, sinc, perusfunktiot:

$$\begin{aligned} z &= x + jy = r e^{j\theta} \\ e^{j\theta} &= \cos(\theta) + j \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}, |a| < 1$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}ven\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) + x(-t)]$$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{O}dd\{x(t)\} = 0.5 \cdot [x(t) - x(-t)]$$

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$\text{sinc}(\theta) = \sin(\pi\theta)/(\pi\theta)$$

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

Likiarvoja ja laskusääntö Dirac-deltafunktiolle:

θ	0	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\sin(\theta)$	0.000	0.3827	0.5000	0.7071	0.8660	1.0000	0.7071	0.0000
$\cos(\theta)$	1	0.9239	0.8660	0.7071	0.5000	0	-0.7071	-1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$$

Konvoluutio:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n - k]$$

FOURIER-SARJA

Jatkuva-aikaisen jaksollisen signaalin Fourier-sarja:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

Jatkuva-aikaisen Fourier-sarjan ominaisuuksia:

Tässä $x(t)$ ja $y(t)$ ovat jaksollisia jaksolla T , sekä a_k ja b_k vastaavat Fourier-sarjan kertoimet.

• lineaarisuus $Ax(t) + By(t) \leftrightarrow Aa_k + Bb_k$

• aikasiirto $x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\Omega_0 t_0}$

• taajuussiirto $e^{jM\Omega_0} x(t) \leftrightarrow a_{k-M}$

• reaalin signaali $x(t) \leftrightarrow \begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$

• reaalin ja parillinen $x(t) \leftrightarrow a_k$ reaalin ja parillinen; reaalin ja pariton $x(t) \leftrightarrow a_k$ puhtaasti imaginaarinen ja pariton

• reaalin $\mathcal{E}ven\{x(t)\} \leftrightarrow \mathcal{R}eal\{a_k\}$ ja reaalin $\mathcal{O}dd\{x(t)\} \leftrightarrow j\mathcal{I}mag\{a_k\}$

• Parsevalin relaatio jaksolliselle signaalille $(1/T) \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

Diskreettiaikaisen jaksollisen sekvenssin Fourier-sarja:

$$x[n] = \sum_{k=-(N)}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad \text{jossa} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-(N)} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

Diskreettiaikaisen Fourier-sarjan ominaisuuksia:

Tässä $x[n]$ ja $y[n]$ ovat jaksollisia jaksolla N , sekä a_k ja b_k vastaavat Fourier-sarjan kertoimet jaksollisia jaksolla N .

• lineaarisuus $Ax[n] + By[n] \leftrightarrow Aa_k + Bb_k$

• aikasiirto $x[n - n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$

• taajuussiirto $e^{jM(2\pi/N)n} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$

• reaalin sekvenssi $x[n] \leftrightarrow \begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$

• reaalin ja parillinen $x[n] \leftrightarrow a_k$ reaalin ja parillinen; reaalin ja pariton $x[n] \leftrightarrow a_k$ puhtaasti imaginaarinen ja pariton

• reaalin $\mathcal{E}ven\{x[n]\} \leftrightarrow \mathcal{R}eal\{a_k\}$ ja reaalin $\mathcal{O}dd\{x[n]\} \leftrightarrow j\mathcal{I}mag\{a_k\}$

• Parsevalin relaatio jaksolliselle sekvenssille $(1/N) \sum_{n=-(N)} |x[n]|^2 = \sum_{k=-(N)} |a_k|^2$

JATK.AIK. FOURIER-MUUNNOS (CTFT)

Jatkuva-aikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Jatkuva-aikaisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia:

Tässä $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ ja $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$.

- lineaarisuus $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$
- aikasiirto $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
- taajuussiirto $e^{j\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow X(j(\omega - \omega_0))$
- konvoluutio $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$
- kertolasku $x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta) Y(j(\omega - \theta)) d\theta$
- derivointi ajassa $(d/dt)x(t) \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$
- reaalinen signaali $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
- Parsevalin relaatio jaksottomalle signaalille $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

Jatkuva-aikaisen Fourier-muunnoksen muunnospareja:

Tässä signaali $\leftrightarrow$ F-muunnos.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi/j [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow 1/(a + j\omega)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow 2 \sin(\omega T_1)/\omega$$

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}(Wt/\pi) \leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

DISKR.AIK. FOURIER-MUUNNOS (DTFT)

Diskreettiaikaisen ei-jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

$$F^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$F\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen ominaisuuksia:

Tässä $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$ ja $y[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega})$, ja $X(e^{j\omega})$ ja $Y(e^{j\omega})$ ovat 2π -jaksollisia.

- lineaarisuus $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
- aikasiirto $x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
- taajuussiirto $e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
- konvoluutio $x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
- kertolasku $x[n] \cdot y[n] \leftrightarrow (1/(2\pi)) \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$
- differenssi ajassa $x[n] - x[n - 1] \leftrightarrow (1 - e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$
- reaalinen sekvenssi $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- Parsevalin relaatio jaksottomalle sekvenssille $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = (1/(2\pi)) \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

Diskreettiaikaisen Fourier-muunnoksen muunnospareja:

Tässä signaali $\leftrightarrow$ F-muunnos.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - (2\pi/N)k)$$

$$\cos(\omega_0 n) \leftrightarrow \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) \right)$$

$$\sin(\omega_0 n) \leftrightarrow (\pi/j) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l) \right)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow 1/(1 - a e^{-j\omega})$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega(N_1 + 0.5))}{\sin(0.5\omega)}$$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}(Wn/\pi) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < W \\ 0, & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$