

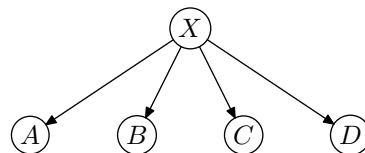
Palauta ratkaisusi viimeistään seminaarissa 28.11. Sitä ennen ratkaisuja voi palauttaa seminaarikerroilla tai lähettää osoitteeseen Jouni Seppänen, Informaatiotekniikan laboratorio, PL 5400, 02015 TKK. Ongelmatapauksissa tehtäviin voi saada selvennystä seminaarissa.

1. Tarkastellaan Bayes-verkkoa $A \rightarrow B$, jonka solmuihin liittyvät paikalliset jakaumat ovat seuraavat.

a	$P(A = a)$	b	a	$P(B = b A = a)$
0	0,3	0	0	0,4
1	0,7	1	0	0,6
		0	1	0,8
		1	1	0,2

Laske jakaumat $P(A | B = 1)$ ja $P(A | B = 0)$.

2. Tarkastellaan kuvan Bayes-verkkoa, jossa esiintyvät luokkamuuttuja X ja havaittavat muuttujat A, B, C ja D . Selitä sanallisesti, mitä riippumattomuuksia verkkorakenteesta seuraa muuttujien yhteisjakaumalle.



3. Tarkastellaan joukossa $\{0, 1\}$ arvoja saavien muuttujien A, B, C, D ja E todennäköisyysjakaumaa, jolle pätee

$$P(A, B, C, D, E) = P(A)P(D)P(B | A)P(C | B, D)P(E | D).$$

(a) Piirrä Bayes-verkko, joka kuvaa niitä ehdollisia riippumattomuuksia, jotka edellisen hajotelman perusteella ovat voimassa.

(b) Laske jakaumat $P(A | E = 0)$ ja $P(C | E = 0)$. Paikalliset jakaumat ovat seuraavat.

a	$P(A = a)$	d	$P(D = d)$
0	0,1	0	0,3
1	0,9	1	0,7

b	a	$P(B = b A = a)$	e	d	$P(E = e D = d)$
0	0	0,1	0	0	0,1
1	0	0,9	1	0	0,9
0	1	0,2	0	1	0,4
1	1	0,8	1	1	0,6

b	d	$P(C = 0 B = b, D = d)$	$P(C = 1 B = b, D = d)$
0	0	0,1	0,9
0	1	0,2	0,8
1	0	0,2	0,8
1	1	0,5	0,5

(Vinkki: Kirjan sivu 12.)

4. Tarkastellaan kätkeyttä Markov-mallia¹, jolla kuvataan luvuista 0 ja 1 koostuvia viiden merkin mittaisia jonoja. Kullekin jonon kohdalle $j = 1, \dots, 5$ mallissa on tuntematon tila T_j (siksi malli on "kätkeyttä") ja havaittu merkki M_j . Merkin M_j jakauma riippuu tilasta T_j seuraavasti:

$$P(M_j = 0 | T_j = 0) = 0,9, \quad P(M_j = 1 | T_j = 0) = 0,1,$$

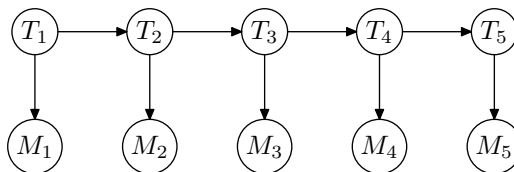
$$P(M_j = 0 | T_j = 1) = 0,1, \quad P(M_j = 1 | T_j = 1) = 0,9.$$

Ensimmäiselle tilalle T_1 on priorijakauma $P(T_1 = 0) = 0,5$, $P(T_1 = 1) = 0,5$ ja sitä seuraaville tiloille ($j = 2, 3, 4, 5$) siirtymäjakauma

$$P(T_j = 0 | T_{j-1} = 0) = 0,8, \quad P(T_j = 1 | T_{j-1} = 0) = 0,2,$$

$$P(T_j = 0 | T_{j-1} = 1) = 0,2, \quad P(T_j = 1 | T_{j-1} = 1) = 0,8.$$

Mallia voidaan kuvata Bayes-verkolla:



Laadi liittymäpuuesitys tälle verkolle. Mitkä ovat liittymäpuun potentiaalifunktiot? (Vinkki: Huangin ja Darwichen artikkeli.)

¹Hidden Markov Model, HMM

5. (Jatkoa edelliselle tehtävälle.) Havaitaan merkkijono $M_1M_2M_3M_4M_5 = 00011$. Laske sanomanvälitysalgoritmin avulla todennäköisyysjakaumat kätketyille tiloille T_j , $j = 1, \dots, 5$.
6. Määritellään $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, kun $x > 0$. Mikä on konjugaattifunktio f^* ? Esitä funktiolle f arvio, joka on kiinteillä parametrin λ arvoilla lineaarinen. Piirrä kuvaaja funktiosta f ja arviosta muutamalla λ :n arvolla. (Kirjan ss. 123–128, 161.)
7. Kuvaille yleisellä tasolla, miten käyttäisit MCMC²-menetelmiä seuraavan ongelman ratkaisemiseen: Bayes-verkkoon $A \rightarrow B \rightarrow C$ liittyvät paikalliset jakaumat $P(A)$, $P(B | A)$ ja $P(C | B)$ ovat jatkuvia ja hankalia käsitellä analyytisesti, mutta osataan tuottaa niiden mukaan jakautuneita satunnaislukuja (ja tietysti laskea niiden arvoja yksittäisissä pisteissä). On arvioitava ehdollista jakaumaa $P(B | C = c)$, missä c on jokin annettu luku.

Kirjan sivulla 176 mainitaan MCMC- ja muiden otantamenetelmien oletuksena, että jakauma tunnetaan kerrointa vaille,

$$P(\mathbf{x}) = P^*(\mathbf{x})/Z.$$

Mainitse ratkaisussasi, mikä on tämä tunnettu funktio P^* .

8. Seuraavat kuvat esittävät kolmea eri Metropolis-Hastings-simulaatiota³. Vasemmanpuoleisissa kuvissa vaaka-akselilla on simulaation kierros (jokaisen ajon pituus on siis 5000 iteraatiota) ja pystyakselilla erään simuloitavan muuttujan arvo kyseisellä kierroksella. Oikeanpuoleiset kuvat ovat histogrammeja saman muuttujan arvoista koko simulaation ajalta.

(a) Mitä ongelmia kuvien perusteella liittyy simulaatioiden tuottamiin otoksiin?

(b) Itse asiassa nämä kolme Metropolis-Hastings-ajoa liittyvät saman mallin samaan muuttujaan, ja ainoa ero niiden välillä on ehdotusjakauman leveydessä (ja alkuarvossa, joka on valittu satunnaisesti kussakin ajossa). Missä ajossa leveys on suurin ja missä se on pienin? Mikä ajoista antaa luultavasti parhaan arvion muuttujan todelliselle posteriorijakaumalle? **Huom.** Katso tarkkaan kuvien akseleita; niitä ei ole asetettu yhteismitallisiksi.

²Markov-ketju -Monte Carlo, Markov Chain Monte Carlo

³Tässä sana "simulaatio" johtuu siitä, että algoritmi simuloi Markov-ketjua.

